

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

ЭФФЕКТ КАЗИМИРА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ**В. М. Мостепаненко, Н. Я. Трунов**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	385
2. Алфавит эффекта — модель одномерного скалярного поля	387
2.1. Граничные условия — идеализированный вариант внешнего поля. 2.2. Квантовая механика струны. 2.3. Полные наборы решений уравнения Клейна — Фока. 2.4. Бесконечная энергия нулевых колебаний зависит от граничных условий. 2.5. Наблюдаемая величина — регуляризованная разность энергий нулевых колебаний. 2.6. Граничные условия моделируют топологию. 2.7. Эффект Казимира как поляризация вакуума. 2.8. Более реалистическая модель — полупроницаемые стенки. 2.9. Массивное поле. 2.10. О физическом смысле казимировской энергии вакуума.	
3. Эффект Казимира для разных полей и пространственных областей	401
3.1. Скалярное поле между пластинами. 3.2. Вакуумная энергия трехмерных ограниченных объемов. 3.3. Электромагнитное поле между пластинами. 3.4. Электромагнитное поле в трехмерных ограниченных объемах. 3.5. Может ли казимировская энергия проходить через нуль? 3.6. Спинорное поле.	
4. Учет реальных свойств среды, ограничивающей объем квантования	407
4.1. Флуктуационное ван-дер-ваальсово взаимодействие — связь с эффектом Казимира. 4.2. Импедансное граничное условие отражает свойства среды. 4.3. Температурные поправки. 4.4. Что измерено в эксперименте?	
4. Нетривиальная топология пространства-времени и космологические приложения	412
5.1. Эффект Казимира на листе Мёбиуса. 5.2. 3-тор и другие топологии. 5.3. Эффект Казимира на сфере. 5.4. Эффект Казимира в космологии.	
6. Эффект Казимира в физике элементарных частиц	417
6.1. Вакуумная энергия в модели мешков. 6.2. Многомерные теории поля типа Калуцы — Клейна. 6.3. Компактификация за счет казимировской энергии. 6.4. Уточнение констант физики частиц с помощью эффекта Казимира.	
7. Заключение	421
Приложение I	421
Приложение II	422
Список литературы	423

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы непрерывно возрастал интерес к физическим явлениям, известным под общим названием «эффект Казимира». Суть этого эффекта заключается в поляризации вакуума квантованных полей, которая возникает вследствие изменения спектра вакуумных колебаний при ограничении объема квантования или при отличии топологии пространства от евклидовой. Диапазон областей физики, в которых проявляется эффект Казимира, очень широк — от статистической физики до физики элементарных частиц и космологии.

Исторически первое предсказание эффекта Казимиром в 1948 г.^{1,2} состояло в том, что на единицу площади двух проводящих плоско-параллельных пластин в вакууме должна действовать сила притяжения $F = -(\pi^2/240) \times (\hbar c/a^4)$, выражаемая через постоянную Планка \hbar , скорость света c и расстояние между пластинами a . Впоследствии такое притяжение было обнаружено

экспериментально³⁻⁶. Для пластин площадью 1 см^2 , $a = 0,5 \text{ мкм}$ сила составила $\approx 0,2 \text{ дн}$ в соответствии с предсказанием теории.

В рамках квантовой теории поля при нулевой температуре возникновение вакуумной плотности энергии, а следовательно, и силы между идеально проводящими пластинами объясняется изменением спектра нулевых колебаний из-за обращения в нуль тангенциальной составляющей электрического поля на пластинах.

Эффект Казимира может быть истолкован как проявление ван-дер-ваальсовых сил молекулярного притяжения на больших расстояниях, когда становится существенным учет запаздывания электромагнитного взаимодействия³²⁻³⁷. При этом сила Казимира вычисляется через характеристики флуктуационного электромагнитного поля во всем объеме, включающем не только область между граничными телами, но и сами эти тела. Однако подход к описанию эффекта, который позволяет заменить рассмотрение поля внутри тел некоторым эффективным граничным условием, в ряде случаев оказывается более простым.

После 1948 г. в литературе появилось несколько сотен работ, посвященных эффекту Казимира, причем большая их часть приходится на последние десятилетия. Помимо изучения вакуумных сил между твердыми телами интерес к эффекту Казимира связан с возможной неевклидовостью топологии пространства-времени. Как и при наличии материальных границ, в топологически нетривиальных пространствах спектр нулевых колебаний отличается от случая пространства Минковского, вследствие чего возникает ненулевая вакуумная плотность энергии. Этот факт имеет большое значение для проблемы космологической постоянной⁴⁵ и в связи с инфляционными космологическими сценариями⁴⁶.

Эффект Казимира оказался весьма существенным в физике адронов при построении модели мешков^{65, 66}, в которой конфинмент кварков обеспечивается постулированием отсутствия тока через поверхность мешка, ограничивающую адрон. При этом казимировская энергия кварковых и глюонных полей должна включаться в полную энергию мешка при расчете свойств адронов.

Весьма актуальны применения эффекта Казимира в суперсимметричных теориях поля типа Калуцы — Клейна. Здесь его учет необходим при рассмотрении механизмов спонтанной компактификации дополнительных пространственных измерений (размерной редукции)⁷⁴.

Наконец, силы Казимира оказались весьма чувствительными к значениям таких требующих уточнения параметров физики элементарных частиц, как параметр нарушения суперсимметрии и массы гипотетических легких частиц⁷⁸. Велики перспективы здесь у атомной силовой микроскопии¹⁰².

В предлагаемом вниманию читателей обзоре охвачены все перечисленные выше направления исследований, причем в отличие от недавнего обзора¹⁰ основное внимание уделяется физической стороне излагаемых вопросов, в том числе распространению методов расчета, использующих эффективные граничные условия, на случай реальных моделей границ, рассмотрению многообразных приложений эффекта, сравнительному анализу различных подходов к его интерпретации.

В разделе 2 на простейшем примере скалярного поля подробно рассмотрены принципиальные физико-математические аспекты эффекта Казимира; эта глава представляет собой замкнутое введение в предмет. Раздел 3 содержит конкретные результаты для реальных трехмерных задач при разных типах полей. В разделе 4 анализируются изменения, вносимые конкретными свойствами среды и выполненные эксперименты. Раздел 5 посвящен более сложным вопросам — казимировской энергии в пространстве-времени с неевклидовой топологией, включая применения в космологии. Наконец, в разделе 6 даны применения эффекта Казимира в различных вопросах физики элементарных частиц. В приложения вынесены некоторые детали

регуляризации вакуумного тензора энергии-импульса. Ниже постоянная Планка \hbar и скорость света c полагаются равными единице. Исключения оговариваются особо.

Мы посвящаем этот обзор памяти нашего друга и коллеги Сергея Георгиевича Мамаева, который так много сделал для развития теории эффекта Казимира.

2. АЗБУКА ЭФФЕКТА — МОДЕЛЬ ОДНОМЕРНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

2.1. Г р а н и ч н ы е у с л о в и я — и д е а л и з и р о в а н н ы й в а р и а н т в н е ш н е г о п о л я

Как было отмечено во введении, многие интересные квантовые эффекты возникают при взаимодействии вакуума квантованных полей с внешними полями. К числу этих эффектов можно отнести и эффект Казимира. Действительно, вспомним простейшую задачу классической механики — отражение частицы от упругой стенки. Очевидно, что такая стенка есть предельный образ быстро возрастающего с координатой потенциала при стремлении интервала возрастания к нулю. Теперь «воспоминание» о потенциале сохраняется лишь в условии отражения, а движение между стенками является свободным и описывается элементарно. В квантовой механике аналогом является задача о прямоугольной потенциальной яме бесконечной глубины, где анализ предельного (по глубине ямы) перехода позволяет исключить нахождение волновых функций для данного потенциала и ограничиться решением свободного уравнения Шрёдингера с нулевыми граничными условиями на стенках.

Замена внешнего поля граничными условиями является приемом, адекватно описывающим многие задачи, в том числе релятивистские, и в то же время позволяющим за счет облегчения технических затруднений сосредоточить внимание на принципиальной стороне эффектов. Необходимо, разумеется, помнить о границах применимости метода, как и всякой идеализации, — например, используя модель ямы бесконечной глубины, в принципе нельзя учесть непрерывный спектр.

В дальнейшем будет существенно, что замена внешнего поля граничным условием возможна и для систем с бесконечным числом степеней свободы. Общеизвестный пример — струна, закрепленная на концах. Вместо явного учета в уравнении Ньютона сил, препятствующих сдвигу граничных точек струны $x = 0, a$, обычно пользуются наложением граничных условий

$$y(0, t) = y(a, t) = 0 \quad (2.1)$$

на смещения y точек струны, параметризованных координатой x . Уравнение же движения оказывается свободным:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (2.2)$$

где ρ — линейная плотность струны, g — коэффициент упругости.

Отметим, что наложение связей, фиксирующих расстояние между частицами системы, также сводится к предельному образу потенциала, быстро растущего при нарушении условий связи.

2.2. К в а н т о в а я м е х а н и к а с т р у н ы

Рассмотрим подробно квантование поля смещений $y(x, t)$ струны как переходный этап к описанию релятивистских квантованных полей в ограниченных областях пространства. Этот раздел носит в основном педагогический характер и может быть пропущен специалистами по квантовой теории.

Перепишем (2.2) в виде стандартного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0; \quad (2.3)$$

здесь $c = (g/\rho)^{1/2}$ — скорость распространения колебаний в струне.

Общее решение (2.3) с условиями (2.1) ищем в виде разложения по ортонормированной системе $y_n(x)$:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) y_n(x),$$

$$y_n(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin k_n x, \quad k_n = \frac{\pi n}{a}. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3), найдем, что каждая амплитуда $a_n(t)$ удовлетворяет уравнению гармонического осциллятора

$$\ddot{a}_n + \omega_n^2 a_n = 0, \quad \omega_n = ck_n = \frac{c\pi n}{a}. \quad (2.5)$$

Линейная плотность энергии ϵ , складывающаяся из кинетической и потенциальной составляющих, определяет полную энергию струны E :

$$E = \int_0^a \epsilon(x, t) dx = \int_0^a \left[\frac{\rho \dot{y}^2}{2} + \frac{g}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (2.6)$$

Ниже для краткости считаем $\rho = g = c = 1$. Подставляя в (2.6) разложение (2.4), с учетом ортонормированности функций $y_n(x)$ получим

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{a}_n^2 + \omega_n^2 a_n^2). \quad (2.7)$$

Представление поля смещений струны $y(x, t)$ через набор осцилляторов a_n (2.4), (2.5) и энергии E как суммы энергий осцилляторов (2.7) позволяет кратчайшим путем построить квантово-механическое описание движения струны. Гамильтониан \hat{H} системы, подобно случаю осциллятора, получим из выражения для энергии (2.7) заменой \dot{a}_n на оператор импульса⁸³

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_n (\hat{p}_n^2 + \omega_n^2 a_n^2), \quad \hat{p}_n = -\frac{i\partial}{\partial a_n}. \quad (2.8)$$

Уравнение Шрёдингера

$$\hat{H}\psi(a_1, a_2, \dots) = E\psi(a_1, a_2, \dots)$$

определяет волновые функции ψ и возможные уровни энергии. В силу независимости осцилляторов в (2.8), очевидно,

$$E = E(m_1, m_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left(m_n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.9)$$

О числах $m_n \geq 0$ говорят как о числах заполнения n -й моды; тот же набор чисел $\{m_n\}$ маркирует собственные функции: $\Psi_{\{m_n\}}(a_1, a_2, \dots)$.

Уникальная особенность осциллятора — линейная зависимость энергии каждой моды от числа заполнения — позволяет представить осциллятор в возбужденном состоянии ($m_n > 0$) как совокупность m_n квантов возбуждения с энергией ω_n каждый. Применительно к струне говорят о состоянии с m_n квантами — фононами в каждой из мод. Существенно, что даже основное состояние с наименьшей энергией (все $m_n = 0$) имеет отличную от нуля

энергию ⁸³

$$E = E_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \neq 0. \quad (2.10)$$

Состояние с $\{m_n\} = 0$ называют вакуумным, или просто вакуумом фононного поля, а E_0 — нулевой энергией вакуумных колебаний.

Полезно отметить, что набор ω_n зависит от граничных условий. Так, при граничных условиях

$$\frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial y(a, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

вместо частот (2.5) получим

$$\omega_n = \frac{2n+1}{2a} \pi, \quad (2.12)$$

выражения же для энергии останутся прежними.

Струна может служить одномерной моделью колебаний в твердом теле. Тогда вакуумное состояние с энергией E_0 достигается при абсолютной температуре $T = 0$ *).

Обратим внимание на то, что в макроскопической среде есть характерный масштаб — длина волны колебаний $\lambda_n = 2\pi/k_n$ не может быть меньше расстояния между атомами d . Поэтому в (2.10) суммирование фактически ограничено частотами $\omega < \Omega \approx c/d$, так что значение E_0 оказывается конечным. В последующих разделах мы будем иметь дело с бесконечными E_0 типа (2.10) с суммированием по всем $n < \infty$. Поэтому потребуется разработка процедур вычисления конечной разности бесконечных величин. В частности, можно придать смысл разности величин E_0 с наборами частот (2.5) и (2.12), более или менее явно вводя обрезающий параметр типа c/d на промежуточных этапах вычислений.

Аргументами волновой функции (2.8) являлись смещения a_n осцилляторов, т. е. использовалось координатное представление. При квантовании полей удобнее, однако, пользоваться иным представлением — чисел заполнения (имеющим также условное наименование «представление вторичного квантования»). Введем операторы

$$a_n^{\pm} = \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{1/2} \left(\hat{a}_n \mp \frac{i\hat{p}_n}{\omega_n}\right) \quad (2.13)$$

(в координатном представлении действие оператора \hat{a}_n сводится к умножению на число a_n , $\hat{p}_n = -i\partial/\partial a_n$; в импульсном представлении $\hat{p}_n = p_n$, $\hat{a}_n = i\partial/\partial p_n$). Исходя из известного коммутатора $[\hat{a}_n, \hat{p}_n] = i$ легко получить

$$[a_n^-, a_n^+] = 1, \quad [a_n^{\pm}, a_n^{\pm}] = 0, \quad (2.14)$$

и все операторы с разными индексами коммутируют.

Временно допустим, что имеется только один осциллятор a_n (n -я мода). Волновая функция такого осциллятора $\Psi_{m_n}(a_n) \equiv |m_n\rangle$, соответствующая числу квантов m_n , хорошо известна ⁸³. Непосредственным действием на нее операторов (2.13) проверяется, что ⁸³

$$\begin{aligned} a_n^+ |m_n\rangle &= (m_n + 1)^{1/2} |m_n + 1\rangle, & a_n^- |m_n\rangle &= m_n^{1/2} |m_n - 1\rangle, \\ a_n^+ a_n^- |m_n\rangle &= m_n |m_n\rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

*) Нулевые колебания в твердом теле проявляются как следствие флуктуации положения атомов, образующих струну: $\bar{y}^2 \neq 0$. На этих флуктуациях рассеивается свет; при больших флуктуациях $\bar{y}^2 \approx d$, где d — расстояние между атомами, не может образоваться кристалл (это характерно для легких атомов, например He), и т. д.

Изменение числа квантов операторами a_n^\pm дает основание назвать их соответственно операторами рождения и уничтожения (в нашей задаче — фонона); оператор же $N_n = a_n^+ a_n^-$ естественно назвать оператором числа квантов, или (квази)частиц. Будем считать, что операторы a_n^\pm также действуют на волновую функцию $|\{m_n\}\rangle = \psi_{m_1, m_2, \dots}(a_1, a_2, \dots)$ совокупности осцилляторов, причем в (2.15) числа заполнения осцилляторов с номерами, отличными от n , не изменяются.

Остается выразить оператор Гамильтона \hat{H} (2.8) через a_n^\pm . Разрешая (2.13) относительно \hat{p}_n, \hat{a}_n , получим (с учетом (2.14))

$$\hat{H} = \sum_n \frac{\omega_n}{2} (a_n^+ a_n^- + a_n^- a_n^+) = \sum_n \omega_n \left(\hat{N}_n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.16)$$

Применение \hat{H} (2.16) к функции $|\{m_n\}\rangle$ непосредственно приводит к прежнему результату (2.9) для энергии.

Отметим, что после выражения всех операторов через a_n^\pm соотношения (2.14), (2.15) полностью определяют свойства системы и о конкретной реализации (2.13) операторов a_n^\pm можно забыть.

В представлении чисел заполнения к обычным числам (c -числам) сводятся только оператор числа частиц \hat{N}_n и функции от него. Остальные же величины, в том числе a_n и линейно с ним связанное поле смещений $y(x, t)$ (2.4), становятся операторами (разумеется, система функций y_n остается c -числовой).

2.3. Полные наборы решений уравнения Клейна — Фока

В расчетах эффекта Казимира существенно используются собственные функции и собственные значения соответствующего полевого уравнения. Рассмотрение релятивистских задач начнем с простейшего случая — незаряженного скалярного поля, определенного на оси (размерность пространства-времени $D = 2$). Оно подчиняется уравнению Клейна — Фока (ниже $\hbar = c = 1$)

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} + (m^2 + V(x)) \varphi(x, t) = 0; \quad (2.17)$$

здесь m — масса поля, т. е. частиц, сопоставляемых полю (у фононов в п. 2.2, очевидно, $m = 0$), $V(x)$ — внешнее скалярное поле, взаимодействующее с полем φ . Следуя идеологии предыдущих разделов, далее считаем $V \equiv 0$, учитывая взаимодействие граничным условием «непроницаемости» на краях отрезка;

$$\varphi(0, t) = \varphi(a, t) = 0. \quad (2.18)$$

Решения (2.17) при $V = 0$ с условиями (2.18) легко находятся:

$$\begin{aligned} \varphi_n^\pm(x, t) &= \frac{1}{(a\omega_n)^{1/2}} e^{\pm i\omega_n t} \sin k_n x, \\ \omega_n &= (m^2 + k_n^2)^{1/2}, \quad k_n = \frac{\pi n}{a} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Функции (2.19) ортонормированы по известному индефинитному скалярному произведению для уравнения (2.17) ⁸³

$$\begin{aligned} (\varphi_n^\pm, \varphi_n^\pm) &= \mp \delta_{nn}, \quad (\varphi_n^\pm, \varphi_n^\mp) = 0, \\ (f, g) &\equiv \int [f^* \partial_t g - g^* \partial_t f] dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Произвольное решение (2.17), (2.18) можно разложить по φ_n^\pm , определяя коэффициенты с помощью (2.20):

$$\varphi(x, t) = \sum_n (a_n^- \varphi_n^-(x, t) + a_n^+ \varphi_n^+(x, t)). \quad (2.21)$$

Решения (2.17) на бесконечной оси, т. е. при отсутствии граничных условий (2.18), очевидно, не квантуются, т. е. допустимы все значения $0 \leq \omega < \infty$. Их удобно записать в виде бегущих волн

$$\varphi_l^\pm = \frac{1}{(4\pi\omega R)^{1/2}} \exp[\pm i(\omega t - kx)] \quad (-\infty < k < \infty), \quad (2.22)$$

нормировка которых определяется заменой в (2.20) $\delta_{nn'} \rightarrow \delta(k - k')$. Разложение (2.21) заменится теперь на

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (a_k^- \varphi_k^- + a_k^+ \varphi_k^+) dk. \quad (2.23)$$

Полезно также получить решения для периодического граничного условия

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \varphi(x + a, t), \\ \partial_x \varphi(x, t) &= \partial_x \varphi(x + a, t), \end{aligned} \quad (2.24)$$

описывающего отождествление граничных точек, или, нагляднее, свертывание отрезка $(0, a)$ в кольцо. Теперь на длине отрезка должно укладываться целое число длин волн (для (2.18) было допустимо и полуцелое).

Одно семейство решений совпадает с (2.19) при $k_n = 2\pi n/a$. Теперь, однако, возможно и другое семейство с $\varphi \neq 0$ в точках $x = 0, a$; оно имеет те же частоты $k_n = 2\pi n/a$ и сводится к замене в (2.19) $\sin k_n x \rightarrow \cos k_n x$. Таким образом, по сравнению с условиями (2.18) теперь удваивается число мод (кроме изменения спектра).

Эти решения можно представить вместо стоячих волн бегущими волнами

$$\begin{aligned} \varphi_n^\pm &= \frac{1}{(2\omega_n a)^{1/2}} \exp[\pm i(\omega_n t - k_n x)], \\ \omega_n &= (m^2 + k_n^2)^{1/2}, \quad k_n = \frac{2\pi n}{a} \quad (-\infty < n < \infty). \end{aligned} \quad (2.25)$$

От системы (2.25) легко совершить предельный переход $a \rightarrow \infty$ к неограниченному пространству.

2.4. Бесконечная энергия нулевых колебаний зависит от граничных условий

Наиболее наглядной характеристикой эффекта Казимира являются средние значения тензора энергии-импульса (ТЭИ) рассматриваемого квантованного поля в вакуумном состоянии. ТЭИ вещественного скалярного поля в двумерном пространстве-времени имеет вид ^{7, 83}

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{2} [(\partial_t \varphi)^2 + (\partial_x \varphi)^2 \pm m^2 \varphi^2], \\ T_{01} = T_{10} &= \frac{1}{2} (\partial_t \varphi \partial_x \varphi + \partial_x \varphi \partial_t \varphi). \end{aligned} \quad (2.26)$$

В представлении чисел заполнения амплитуды a_n^\pm в разложении поля (2.21) нужно считать операторами рождения и уничтожения с коммутационными соотношениями (2.14). После этого, подставляя разложение поля (2.21) в (2.26), получим оператор ТЭИ:

$$T_{00} = \frac{1}{2} \sum_n [(\omega_n^2 + m^2) \varphi_n^+ \varphi_n^- + (\partial_x \varphi_n^+) (\partial_x \varphi_n^-)] (a_n^+ a_n^- + a_n^- a_n^+). \quad (2.27)$$

и аналогично для других компонент. В формуле (2.27) сразу опущены произведения операторов с несовпадающими индексами, а также члены вида $a_n^+ a_n^+$, $a_n^- a_n^-$, так как они обращаются в нуль при усреднении ТЭИ по любому состоянию в силу соотношений (2.15) и ортогональности состояний с несовпадающими наборами $\{m_n\}$.

Неперенормированная плотность энергии находится как среднее $\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle$, причем последняя скобка в (2.27) с учетом (2.16) после усреднения дает $\langle 0 | 2N_n + 1 | 0 \rangle = 1$. Специфика конкретной задачи содержится в выборе функций φ_n^\pm . Наиболее прост результат для периодических условий (2.24), поскольку из (2.25) следует $\varphi_n^+ \varphi_n^- = \text{const}$:

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = \frac{1}{2a} \sum_n \omega_n. \quad (2.28)$$

В силу независимости (2.28) от координаты (что следовало ожидать в силу трансляционной симметрии) полная энергия E получается просто умножением (2.28) на длину отрезка a .

При наличии стенок набор (2.19) приводит к появлению в (2.27) слагаемых как с $\sin^2 k_n x$, так и с $\cos^2 k_n x$. Учитывая, что сумма этих величин равна единице, приведем результат к виду

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = \frac{1}{2a} \sum_n \omega_n + \Delta(m^2, x), \quad (2.29)$$

$$\Delta(m^2, x) \equiv -\frac{m^2}{2a} \sum_n \frac{\cos 2k_n x}{\omega_n}.$$

Натяжение в обоих случаях выражается одинаково:

$$\langle 0 | T_{11} | 0 \rangle = \frac{1}{2a} \sum_n \frac{k_n^2}{\omega_n}. \quad (2.30)$$

Наконец, для пустого пространства (оси) из (2.22) получим

$$\langle 0_M | T_{ij} | 0_M \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k_i k_j \delta_{ij} \frac{dk_1}{\omega}, \quad (2.31)$$

где введен 2-вектор $k_0 = \omega$, $k_1 = k$.

Недиагональные компоненты T_{01} , T_{10} во всех случаях имеют нулевые средние.

Как видно из (2.29), наличие границ вызывает при ненулевой массе поля появление дополнительного члена в плотности энергии, зависящего от координат. Вклад этого члена в ϵ обсуждается в разделе 2.9; пока отметим лишь, что Δ имеет конечное значение во всех внутренних точках отрезка $(0, a)$, а среднее по отрезку значение $\Delta = 0$. Поэтому при любой массе поля его энергия в вакуумном состоянии есть

$$E := \int_0^a dx \langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n.$$

Поскольку даже при совпадающих значениях длины a наборы частот зависят от граничных условий, возникает искушение сказать, что и энергии вакуумных колебаний зависят от граничных условий.

Здесь, однако, требуется осторожность. Дело в том, что частоты ω_n неограниченно возрастают при $n \rightarrow \infty$, так что величины (2.28)–(2.31) расходятся и им не соответствует какое-либо конечное значение. Можно надеяться сделать осмысленным утверждение о несовпадении значений вакуумных энергий, поступая следующим образом. Возьмем какую-либо функцию $f_\alpha(\omega) \leq 1$ такую, что $f_\alpha(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$ и всех $\alpha \neq 0$, а при $\alpha = 0$

значение $f_\alpha(\omega) = 1$ независимо от ω . Примером может служить $f_\alpha(\omega) = \exp(-\alpha\omega)$. Вычисляя вакуумную энергию для каждого из наборов частот ω_n^I, II , заменим в суммах $\omega_n \rightarrow \omega_n f_\alpha(\omega_n)$; тогда суммы при $\alpha \neq 0$ сходятся и имеют конечное значение, зависящее от α . Разностью вакуумных энергий естественно назвать предел

$$\Delta E = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\sum_n \omega_n^I f_\alpha(\omega_n^I) - \sum_n \omega_n^{II} f_\alpha(\omega_n^{II}) \right). \quad (2.32)$$

Следует ожидать, вообще говоря, $\Delta E \neq 0$. Разумеется, вопросы о существовании предела в (2.32) и о независимости его от вида f_α требуют отдельного анализа.

2.5. Наблюдаемая величина — регуляризованная разность энергий нулевых колебаний

Если нас интересует значение вакуумной энергии или ее плотности, то из вакуумного среднего 00-компоненты ТЭИ для придания ему смысла естественно вычитать вклад пространства Минковского, т. е. определять перенормированную плотность энергии ε как

$$\varepsilon = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle_\alpha - \langle 0_M | T_{00} | 0_M \rangle_\alpha), \quad (2.33)$$

где индекс α использован для обозначения той же процедуры, что в (2.32). Перенормированная энергия \mathcal{E} определится как интеграл от ε . Отметим, что мощности спектров в двух составляющих (2.33) могут быть различны: например, счетный при наличии границ и континуальный в пустом пространстве.

Покажем, что ε из (2.33) действительно имеет конечное значение, ограничиваясь пока случаем безмассового скалярного поля. Для этого удобно воспользоваться формулой суммирования Абеля — Плана^{88, 93}:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(y) dy - \frac{F(0)}{2} + i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (2.34)$$

Возьмем в качестве функции $F(n)$ величину $f_\alpha(\omega_n) \omega_n$. Нетрудно увидеть, что интеграл в (2.34) соответствует вкладу неограниченного пространства (2.31) и в разности (2.33) выпадает. Таким образом, расходящемуся ряду следует приписать после снятия обрезания $\alpha \rightarrow 0$ следующее регуляризованное значение:

$$\text{reg} \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = -\frac{F(0)}{2} + i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (2.35)$$

Очевидно, что ввиду быстрой сходимости интеграла в (2.35) можно сразу полагать $f_\alpha = 1$, т. е. $\alpha = 0$, и результат не зависит от конкретного выбора f_α .

В важном случае безмассового поля с границами $\omega_n = \pi n/a$, и суммирование проводится элементарно:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2a^2} \text{reg} \sum_1^{\infty} n = -\frac{\pi}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} = -\frac{\pi}{24a^2}. \quad (2.36)$$

Вычисляя аналогично перенормированное натяжение (давление) $P = \langle 0 | T_{11} | 0 \rangle_{\text{reg}}$ исходя из (2.26), получим $P = \varepsilon$. Отсюда для перенормированной энергии $\mathcal{E} = a\varepsilon = -\pi/24a$ следует

$$P = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a},$$

т. е. обычное термодинамическое соотношение для упругой деформации. Можно сказать, что вакуум ведет себя подобно максвелловскому упругому эфиру (с отрицательными анергией и натяжением).

При изменении расстояния между стенками энергия внутренней области ξ изменяется; вакуумная же энергия внешних областей, даже если и отлична от нуля вследствие наличия границы, при передвижении стенок не изменяется; это ясно уже из отсутствия конечного параметра. Полная энергия системы, таким образом, уменьшается как $\xi \sim -a^{-1}$ при сближении границ — «пластин». Так возникает сила (давление), равная P и стремящаяся сблизить пластины — границы.

Именно подобный эффект экспериментально наблюдался при сближении металлических пластин, являющихся (почти) непроницаемыми для электромагнитного поля³.

2.6. Г р а н и ч н ы е у с л о в и я м о д е л и р у ю т т о п о л о г и ю

Для периодических условий (2.24), моделирующих окружность S^1 , т. е. простейшее пространство с нетривиальной топологией, вместо (2.37) легко получить

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{12a^2}.$$

В данном случае четырехкратную разницу с вариантом нулевых условий (2.36) можно объяснить наивно: как следствие упомянутых в разделе 2.3 удвоения числа мод и удвоения частоты в каждой n -й моде. Следующий пример, однако, покажет, что качественные суждения о бесконечных суммах могут приводить к ошибкам. Действительно, наложим условие антипериодичности

$$\varphi(x+a, t) = -\varphi(x, t). \quad (2.37)$$

Тогда допустимые частоты имеют вид

$$\omega_n = \frac{2\pi [n + (1/2)]}{a} = k_n. \quad (2.38)$$

Для суммирования по полуцелым числам в (2.38) необходимо применить не формулу Абеля — Плана (2.36), а ее аналог¹²

$$\operatorname{reg} \sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) = -i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} + 1} dt, \quad (2.39)$$

Рис. 1. Варианты топологии в одномерном случае (а, б)

отличающийся, в частности, знаком перед интегралом. Расчет по (2.39) приводит к результату

$$\varepsilon = \frac{\pi}{12a^2}, \quad \xi = \varepsilon a = \frac{\pi}{12a}, \quad (2.40)$$

т. е. в случае набора частот (2.38) изменяется даже знак ε .

Конфигурации полей с условием (2.37) называют скрученными (twisted). Они соответствуют так называемому глобально нетривиальному расслоению^{14, 89}. Случай поля с самодействием см., например, в²³.

Попытаемся придать некоторую наглядность формально введенному условию (2.37). Обычному условию периодичности, $\varphi(x+a, t) = \varphi(x, t)$, как уже упоминалось, соответствует наглядный образ окружности S^1 (рис. 1, а). При условии (2.37) мы вернемся к прежнему значению поля $\varphi(x, t) = \varphi(x+2a, t)$, только пройдя путь $2a$, т. е. «два оборота»; наглядный образ см. на рис. 1, б. В реальности такой непрерывный путь начертит карандаш

на двусторонней поверхности — листе Мёбиуса. Можно также вспомнить, что спинорная волновая функция возвращается к прежнему значению также после двух оборотов, т. е. вращения на 4π . Ниже мы увидим, что в задачах о поле на листе Мёбиуса и о спинорных полях действительно естественно возникают условия антипериодичности и суммирование по полуцелым значениям (конечно, эти задачи не одномерные).

2.7. Э ф ф е к т К а з и м и р а к а к п о л я р и з а ц и я в а к у у м а

Приведенные выше примеры показывают, что при наличии границ вакуум квантованного поля обладает некоторой ненулевой энергией. В стандартной теории поля для неограниченного пространства, как известно, энергию вакуума полагают равной нулю, что сводится к изменению на $\omega/2$ начала отсчета энергии каждой моды*). Такой переход мотивируется тем, что энергия вообще определяется с точностью до аддитивной постоянной и формализуется с помощью операции нормального упорядочения операторов физических величин. Эта операция сводится к замене $H \rightarrow N(H)$, $T_{ik} \rightarrow N(T_{ik})$ и т. д., где символ N означает перестановки операторов $a_n^- a_n^+ \rightarrow a_n^+ a_n^-$ как коммутирующих. Из (2.16) легко видеть, что при этом половинки частот исчезают. Дополнительным аргументом в пользу приписывания нулевых значений энергии и другим наблюдаемым в вакууме является то обстоятельство, что только при этих значениях вакуумное состояние инвариантно относительно группы Пуанкаре (т. е. сдвигов и лоренцевских преобразований).

В рассматриваемом нами круге задач имеется — даже при фиксированных граничных условиях — бесконечный набор различных вакуумных состояний для разных объемов (величин a) системы. Эти состояния переходят одно в другое при адиабатическом (без возбуждения квантов) изменении параметров системы (значения a) — именно так определялась сила, действующая между граничными пластинами. Ясно, что приписывание наперед заданных (в том числе одинаковых нулевых) значений энергии нескольким состояниям, между которыми возможны переходы, физически не корректно. Не работает и аргумент, связанный с пуанкаре-инвариантностью — ее заведомо нет при наличии границ.

Таким образом, логически неизбежно использование в качестве характеристики вакуумного состояния изменения самих средних ТЭИ под действием внешнего поля (граничных условий), а не средних от нормально упорядоченного ТЭИ. Отметим, что возможность наличия у вакуума квантованных полей ненулевого ТЭИ детально обоснована в⁴⁵ (см. также п. 5.4 в связи с проблемой космологической постоянной).

Следует иметь в виду, что в задачах, связанных с вычислением сил, т. е. производных от ξ , в значениях ξ остается еще некоторый произвол: результат не изменится, если все ξ изменить на одну и ту же постоянную. При учете гравитации, однако, когда сам перенормированный ТЭИ подставляется в правую часть уравнений Эйнштейна, недопустим и такой произвол. В этих задачах, характеризуемых не границами, а ненулевой кривизной пространства-времени, логически единственной возможностью является вычитание при перенормировке ТЭИ вакуума касательного пространства Минковского (см. п. 5).

Появление у вакуумного состояния ненулевых локальных наблюдаемых (ТЭИ) естественно называть поляризацией вакуума по аналогии с известными эффектами квантовой электродинамики, например поляризацией электрон-позитронного вакуума в кулоновском поле ядра⁸⁶.

*) Данное переопределение энергий, разумеется, не исключает самих эффектов, обусловленных нулевыми колебаниями вакуума, например лэмбовского сдвига. Интересно отметить, что Фейнманом⁸⁶ дано качественное объяснение лэмбовского сдвига, связанное с переопределением вакуумной энергии замкнутой области.

Отметим, что в рассматриваемых нами задачах наглядно проявляется глобальность вакуума. Спектр колебаний, а с ним и локальная плотность энергии $\varepsilon(x)$ являются функционалами от значений внешнего поля $V(x)$ во всем пространстве, включая границы. Поэтому даже внутри области, т. е. в тех точках, где $V(x) = 0$, плотность энергии чувствительна к поведению $V(x)$ во всех удаленных точках. Данное обстоятельство окажется существенным в гл. 5 при рассмотрении космологических приложений эффекта Казимира.

2.8. Более реалистическая модель — полупроницаемые стенки

Граничные условия (2.18) означают абсолютную непроницаемость стенок, так что внешнее пространство полностью изолировано от объема между стенками. Теперь мы учтем внешнее поле $V(x)$ явно посредством уравнения (2.17)⁴⁰.

Будем считать, что потенциал $V(x) = V_\lambda(x)$ равен нулю во всех внутренних точках отрезка и зависит от параметра λ таким образом, что при $\lambda \rightarrow \infty$ обеспечивает полную непроницаемость, т. е. независимость областей вне и внутри отрезка $(0, a)$. Очевидно, что эти условия не фиксируют $V_\lambda(x)$ однозначно; произволом можно распорядиться так, чтобы упростить вычисления.

Выберем $V_\lambda(x)$ в виде суммы двух дельта-функций, причем удобно в целях симметрии сдвинуть начало координат в центр отрезка $(0, a)$:

$$V_\lambda(x) = \lambda \left(\delta \left(x - \frac{a}{2} \right) + \delta \left(x + \frac{a}{2} \right) \right). \quad (2.41)$$

Непроницаемым стенкам в точках $x = \pm a/2$ соответствует, как и было условлено, $\lambda \rightarrow \infty$. При всех же конечных значениях λ стенки $x = \pm a/2$ являются полупроницаемыми, т. е. решения волнового уравнения (2.17) с потенциалом (2.41) охватывают все пространство и не обязаны обращаться в нуль на стенках.

В данной задаче есть только непрерывный спектр $0 < \omega < \infty$. По соображениям симметрии решения можно искать в виде двух семейств — четного и нечетного по x , с волновыми числами $k \geq 0$. При этом для безмассового поля $\omega = k$, так что вместо k всюду пишем ω :

$$\varphi_{j\omega}^\pm(x, t) = (2\pi\omega)^{-1/2} e^{\pm i\omega t} \chi_{j\omega}(x) \quad (j = 1, 2), \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \chi_{1\omega} &= A_1 \sin \omega x, \quad |x| \leq \frac{a}{2}, \\ &= \sin(\omega x + \delta_1 \varepsilon(x)), \quad |x| \geq \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Второе семейство $\chi_{2\omega}$ отличается от первого заменами $\sin \rightarrow \cos$, $A_1 \rightarrow A_2$, $\delta_1 \rightarrow \delta_2$ (функция $\varepsilon(x) = \pm 1$ при $x \gtrless 0$). Единичный коэффициент при \sin в области $|x| > a/2$ обеспечивает правильную нормировку (по потоку).

При полном отсутствии стенки ($\lambda = 0$) фазовый сдвиг на границе отсутствует, $\delta_j = 0$, так что из непрерывности $\chi_{j\omega}$ в точках $x = \pm a/2$ (справедливой и при $\lambda \neq 0$) следует, что в пустом пространстве $A_j = 1$.

Пользуясь общими формулами разделов 2.4, 5, найдем выражение для T_{00} и перенормированной плотности энергии ε между стенками, определяемыми семействами функций с номером j

$$\varepsilon_j = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^\infty \Omega (A_j^2 - 1) d\Omega; \quad (2.44)$$

здесь и ниже использованы безразмерные параметры $\Omega = a\omega/2$ и $\Lambda = \lambda a/2$. Выражение (2.44) соответствует (2.33): вычитание вклада вакуума пустого

пространства обеспечивает появление слагаемого -1 в круглых скобках. В соответствии с вышесказанным при $\lambda = 0$ значение $A_j = 1$, так что $\varepsilon_j = 0$, как и должно быть.

Величины A_j , как и δ_j , находятся элементарно, но несколько громоздко, подстановкой (2.42) и (2.41) в волновое уравнение. После некоторых преобразований удается представить, например, A_1 в виде ⁴⁰

$$A_1^2 - 1 = -\Lambda \operatorname{Im} \frac{e^{i\Omega}}{\Omega e^{i\Omega} + \Lambda \sin \Omega}.$$

Такая форма позволяет легко вычислить ε_1 поворотом контура интегрирования на $\pi/2$ (причем бесконечная четверть окружности дает нулевой вклад):

$$\varepsilon_1 = -\frac{\Lambda^2}{\pi a^2} \int_0^{\infty} \frac{ye^{-y} dy}{ye^y + \Lambda \operatorname{sh} y}. \quad (2.45)$$

Полная плотность энергии $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0$ при всех Λ , поскольку ε_2 отличается от (2.45) знаком и заменой $\operatorname{sh} \rightarrow \operatorname{ch}$, а при всех аргументах $\operatorname{sh} y < \operatorname{ch} y$.

Переход к непроницаемым стенкам достигается предельным переходом $\Lambda \rightarrow \infty$. Легко найти, что при этом $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -\pi/24 a^2$ в соответствии с (2.36).

Преимущество изложенного метода — сравнение спектров одинаковой (континуальной) мощности. Более того, поскольку при всех значениях Λ , включая пустое пространство $\Lambda = 0$, спектр простирается на ту же область $0 < \Omega < \infty$, мы можем проводить перенормировку помодно, сперва вычитая вакуумный вклад пространства Минковского в каждой моде (что сводится к замене $\Omega A_j^2 \rightarrow \Omega (A_j^2 - 1)$) и лишь затем выполняя интегрирование по частотам. При таком порядке действий расходящиеся величины вообще не появляются. Ясно, что такое помодное вычитание невозможно при сравнении счетного и континуального спектров в (2.34), да и при сравнении разных счетных спектров (2.32). Здесь мы вынуждены рассматривать бесконечные суммы и интегралы как целостные объекты и придавать смысл их разности введением того или иного способа регуляризации.

Поучительно получить из (2.45) плотность энергии при слабом граничном потенциале; если Λ так мал, что $|\ln \Lambda| \gg 1$, то ⁴⁰

$$\varepsilon \approx -\frac{\Lambda^2}{2\pi a^2} \ln \Lambda. \quad (2.46)$$

Как и должно быть, $\varepsilon \rightarrow 0$ при отсутствии стенок, т. е. $\Lambda \rightarrow 0$. Неаналитичность (2.46) при $\Lambda = 0$ сигнализирует о неприменимости выражения ε при $\Lambda < 0$ (тогда $\operatorname{Im} \varepsilon \neq 0$). Действительно, для безмассового поля любой отрицательный потенциал приводит при малых $k \approx 0$ к отрицательному квадрату частоты $\omega^2 < 0$. Особенно наглядно это в случае широкой потенциальной ямы малой глубины $V(x) = -V_0$; забывая в первом приближении о краях ямы, получим из (2.17) при $k \approx 0$ и $m = 0$ значение $\omega^2 \approx -V_0 < 0$. Одна из функций φ^\pm теперь растет со временем как $e^{|\omega|t}$. Эта неустойчивость приводит к бозонной конденсации — энергетически выгодному рождению макроскопически большого числа частиц и перестройке вакуума ⁸⁶. Данное явление, родственное фазовым переходам с образованием параметра порядка $\langle 0 | \varphi | 0 \rangle \neq 0$, для рассматриваемого круга задач изучено в ⁴⁰.

Описанной процедуры перенормировки недостаточно для получения конечного значения ε в точках, где $V(x) \neq 0$, т. е. в области стенок. Здесь дополнительно необходимо вычитать слагаемые типа $J_1 V(x) + J_2 \square V(x)$, где J_n — некоторые бесконечные интегралы по спектру ⁴².

Отметим, что для безмассового поля $\varepsilon = P = 0$ во всей внешней области $x < 0$, $x > a$ независимо от значения Λ , включая случай непроницаемых стенок $\Lambda \rightarrow \infty$.

2.9. М а с с и в н о е п о л е

Найдем вначале перенормированную полную энергию ξ . Как уже отмечалось в разделе 2.4, дополнительный член Δ в (2.29), возникающий при $m \neq 0$ и наличии границ, исчезает при интегрировании по объему, т. е. отрезку $(0, a)$, вследствие чего вклада в энергию не дает.

Вычисления с частотами $\omega_n = (m^2 + b^2 n^2)^{1/2}$, где $b = \pi/a$, для массивного поля имеют следующие особенности по сравнению с безмассовым случаем. Во-первых, в (2.35) теперь отличен от нуля член $F(0) = m$; во-вторых, функции $F(\pm it) = [m^2 + b^2 (\pm it)^2]^{1/2}$ теперь нужно считать несовпадающими лишь при $t > m/b$. В итоге

$$\xi = -\frac{m}{4} - \frac{1}{4\pi a} \int_{2\mu}^{\infty} \frac{[y^2 - (2\mu)^2]^{1/2} dy}{y-1}, \quad (2.47)$$

где $\mu = ma$. При $m = \mu = 0$ воспроизводится (2.36).

Первый член в (2.47) не зависит от геометрии и может быть опущен во всех задачах, где речь идет о силах, т.е. производных $d\xi/da$. После такой конечной перенормировки из интеграла (2.47) при $\mu = ma \gg 1$ следует

$$\xi \approx -\frac{\mu^{1/2}}{4\sqrt{\pi a}} e^{-2\mu}. \quad (2.48)$$

Экспоненциальная малость вакуумной энергии при $\mu \gg 1$, т. е. при размерах системы a , сильно превосходящих комptonовскую длину m^{-1} , является общим свойством. В обратном случае малых масс с логарифмической точностью

$$\xi \approx -\frac{\pi}{24a} + \frac{\mu^2 \ln \mu^2}{32\pi a}. \quad (2.49)$$

Неаналитичность (2.49) при $\mu^2 = 0$ имеет ту же природу, что и в (2.46).

Обратимся теперь к оценке вклада в плотность энергии ε составляющей Δ из (2.29), отличной от нуля только для массивного поля в областях с границами.

Простое асимптотическое выражение для Δ получим при условии $\mu = ma \ll 1$:

$$\Delta(m, x) \approx \frac{m^2}{2\pi} \ln \left(2 \sin \frac{\pi x}{a} \right). \quad (2.50)$$

Из (2.50) следует, что знак Δ меняется при $x = a/6, 5a/6$, причем вблизи от стенок функция Δ имеет интегрируемую особенность. Например, вблизи стенки $x = 0$

$$\Delta \approx \frac{m^2}{2\pi} \ln \frac{2\pi x}{a} < 0. \quad (2.51)$$

Характер особенности (2.51) сохраняется при любом значении μ : в случае $\mu = ma \gg 1$, заменяя суммирование в (2.29) по медленно меняющейся переменной n/μ интегрированием, получим вблизи стенки $x = 0$ ($mx \ll 1$)

$$\Delta \approx -\frac{m^2}{2\pi} K_0(2mx) \quad (2.52)$$

(K_0 — функция Макдональда).

Появление особенности (2.51) связано с заменой потенциала непроницаемой стенкой. Так, для полупроницаемых стенок типа (2.41) появляется новый безразмерный параметр $\xi = m/\lambda$. Применяя метод, использованный в разделе 2.8, легко получить, что в (2.51) при $x/a < \xi \ln(x/a)$ заменяется на $\ln \xi$, т. е. постоянную. Таким образом, при всех ненулевых значениях ξ , т. е. $\lambda \neq \infty$, рост Δ , а с ней и плотности энергии вблизи стенки, прекращается.

2.10. О физическом смысле казимировской энергии вакуума

Как было отмечено в разделе 2.7, для данной конфигурации границ полная казимировская энергия определена с точностью до аддитивной постоянной, не зависящей от расстояния и потому не влияющей на значение силы. В разделах 2.8, 2.9 на конкретных примерах показано, что этот вклад в энергию связан с полностью или частично непроницаемыми стенками. Интегрирование плотности вакуумной энергии (2.33) по всему пространству дает, вообще говоря, полную казимировскую энергию вакуума, включая энергию стенок.

При расчетах вакуумной энергии часто удобны такие вычитательные процедуры, которые устраняют не только ведущую расходимость $\sim p^D$ (p — импульс обрезания, D — размерность пространства-времени), но и — частично или полностью — энергию стенок. В целях дальнейшего использования рассмотрим, как связаны между собой получающиеся при этом значения казимировской энергии, и обсудим их физический смысл.

Введем краткое обозначение

$$t(m, \lambda, a; x) = \langle 0 | T_{00}(x) | 0 \rangle$$

для среднего значения T_{00} в вакуумном состоянии с указанием всех параметров задачи. Перенормированное значение плотности энергии, полученное вычитанием вклада пространства Минковского (2.33), обозначим, как и ранее, $\varepsilon(m, \lambda, a; x)$. Напомним, что эта перенормировка фактически выполняется помодным вычитанием (2.44) или, для изначально непрозрачных стенок ($\lambda = \infty$), отбрасыванием расходящегося интеграла в (2.34).

Полная энергия вакуума во всем пространстве при наличии полупрозрачных стенок в точках $x = \pm a/2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^{\text{tot}}(m, \lambda, a; x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(m, \lambda, a; x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (t(m, \lambda, a; x) - t(m, \lambda = 0, a; x)) dx. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Здесь учтено, что при $\lambda = 0$ мы возвращаемся к пустому пространству Минковского, так что разность значений t в скобках (2.53) та же, что в (2.33). Энергию $\xi^{\text{tot}}(\lambda)$ можно трактовать как работу по деформации вакуума, совершаемую при адиабатическом уменьшении прозрачности стенок, находящегося на постоянном расстоянии a . При $\lambda \rightarrow \infty$ все пространство разбивается на три независимые области и вместо (2.53) можно написать

$$\xi^{\text{tot}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \xi^{\text{tot}}(\lambda) = 2\xi_{1/2} + \xi, \quad (2.54)$$

$$\xi_{1/2} = \int_{-\infty}^{-a/2} \varepsilon(m, \infty, a; x) dx, \quad \xi = \int_{-a/2}^{a/2} \varepsilon(m, \infty, a; x) dx,$$

где $\xi_{1/2}$ — перенормированная энергия полупространства, ограниченного стенкой, и использовано, что ε — четная функция x .

Величина ξ — это казимировская энергия за вычетом «наружной» части энергии стенок $2\xi_{1/2}$; она фактически уже встречалась выше (см., например, для массивного случая (2.47)). Величина $\xi^{\text{tot}}(\lambda)$ является наиболее естественной характеристикой вакуумной энергии массивного поля при наличии полупрозрачных стенок, поскольку в этом случае при всех $\lambda \neq 0$, включая $\lambda \rightarrow \infty$, плотность энергии вакуума отлична от нуля во всем

пространстве⁴⁰. Введение \mathcal{E}^{tot} необходимо и для безмассового поля в задачах с искривленными границами (см. раздел 3.3).

Очевидно, что с уединенной непроницаемой стенкой связана энергия двух полупространств

$$\mathcal{E}_{\text{ст}} = 2\mathcal{E}_{1/2} \equiv Jm, \quad (2.55)$$

где J — безразмерная величина. Пропорциональность $\mathcal{E}_{\text{ст}}$ массе поля следует из отсутствия для уединенной стенки других размерных параметров (аналогично и в (2.54) плотность энергии снаружи непрозрачных стенок не зависит в действительности от a).

Заметим теперь, что может быть введена еще одна физически обоснованная процедура получения вакуумной энергии, не содержащей ни «наружной», ни «внутренней» части энергии стенок:

$$\mathcal{E}^{\text{f}}(m, a) \equiv \lim_{a' \rightarrow \infty} (\mathcal{E}(m, a) - \mathcal{E}(m, a')). \quad (2.56)$$

Величина \mathcal{E}^{f} имеет смысл работы, совершаемой при адиабатическом сближении до расстояния a первоначально бесконечно удаленных стенок (мы здесь считаем стенки непрозрачными, но фактически (2.56) имеет смысл и при любой $\lambda = \text{const}$).

В одномерном случае различие между величинами \mathcal{E} и \mathcal{E}^{f} сводится к членам типа $-m/4$ в формуле (2.47). Однако в дальнейшем при рассмотре-

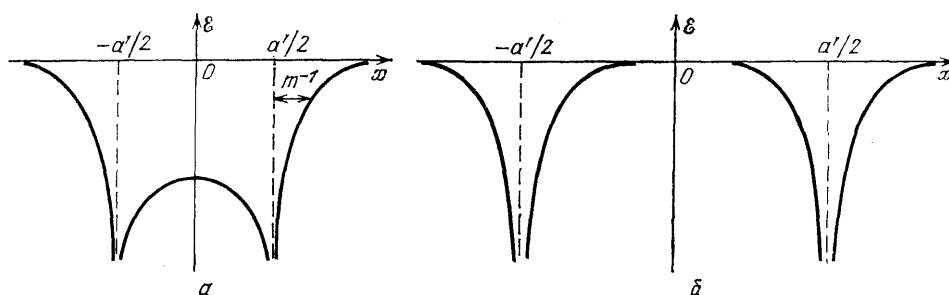


Рис. 2. Плотность вакуумной энергии (в вариантах a и b)

ним массивных полей в многомерных областях величина \mathcal{E} окажется, вообще говоря, бесконечной, поскольку перенормированная согласно (2.33) плотность энергии имеет неинтегрируемую особенность $\varepsilon(x) \rightarrow \infty$ при приближении к стенкам. Поэтому в многомерном случае вычитательная процедура (2.56) становится нетривиальной и позволяет избавиться от бесконечной энергии стенок, не влияющей на значения сил Казимира.

Для выяснения связи между \mathcal{E} и \mathcal{E}^{f} раздвинем стенки так, чтобы в (2.56) выполнялось условие $ma' \gg 1$, т. е. практически бесконечно далеко (рис. 2). Тогда энергия $\mathcal{E}(m, a')$ с асимптотической точностью будет независимо складываться из энергий двух областей, примыкающих изнутри к стенкам, т. е. $\mathcal{E}(m, a') \rightarrow 2\mathcal{E}_{1/2} = \mathcal{E}_{\text{ст}}$ (см. рис. 2, б; напомним, что в \mathcal{E} по определению не учитывается энергия внешней области).

В итоге имеем

$$\mathcal{E}^{\text{f}} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{ст}}, \quad \mathcal{E}^{\text{tot}} = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{ст}} = \mathcal{E}^{\text{f}} + 2\mathcal{E}_{\text{ст}}.$$

Таким образом, энергия вакуума \mathcal{E}^{tot} аддитивно складывается из «топологической» энергии образования стенок $2\mathcal{E}_{\text{ст}}$ на бесконечно большом расстоянии и энергии \mathcal{E}^{f} , приобретаемой при их сближении.

Определение \mathcal{E}^{f} (2.56) может быть представлено в более удобной для практических применений форме. Действительно, по соображениям размер-

ности

$$\mathcal{E}(m, a) = m\varphi(ma) = \frac{\chi(ma)}{a},$$

где φ и χ — безразмерные функции, явный вид которых здесь несуществен. Отсюда следует, что $\mathcal{E}(m, ba) = \mathcal{E}(bm, a)/b$ при любом положительном b и $m \neq 0$. Поэтому в (2.56) можно положить $a' = ba$ и переписать \mathcal{E}^f в виде

$$\mathcal{E}^f(m, a) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\mathcal{E}(m, a) - \frac{1}{b} \mathcal{E}(bm, a) \right). \quad (2.57)$$

так что теперь сравниваются одинаковые промежутки, но разные массы квантованного поля.

Запись \mathcal{E}^f в виде (2.57) позволяет с использованием спектрального представления для \mathcal{E} проводить вычислительную процедуру помодно.

При вычислении сил в одномерных задачах, а также в многомерных задачах с плоскими границами все приведенные в данном разделе определения энергии эквивалентны, поскольку различаются разве лишь на константу вида (2.55). При этом на практике удобнее пользоваться величиной \mathcal{E}^f , поскольку она не содержит вклада энергии стенок. Для задач с искривленными границами адекватной характеристикой вакуумной энергии является \mathcal{E}^{tot} . Это связано, в частности, с тем, что удаление искривленных границ на бесконечность подобно предельному переходу в (2.56) неизбежно сопровождается их деформацией и величина \mathcal{E}^f лишается непосредственного смысла.

В космологических же задачах, где необходимо подставлять в уравнения Эйнштейна однозначно определенный вакуумный ТЭИ, нет границ, а потому нет и проблемы энергии границ.

3. ЭФФЕКТ КАЗИМИРА ДЛЯ РАЗНЫХ ПОЛЕЙ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

3.1. Скалярное поле между пластинами

В этой главе мы рассмотрим эффект Казимира для полей со спином 0, 1/2, 1 и различных пространственных областей — пространство между плоскопараллельными пластинами, сфера, параллелепипед и др. Начнем со случая скалярного поля между пластинами.

Рассмотрим ТЭИ вещественного скалярного поля для конфигурации двух параллельных пластин $x = \pm a/2$ с произвольной прозрачностью λ , задаваемой потенциалом (2.41). Соответствующее выражение получается из (2.26) добавлением производных по всем трем координатам и называется каноническим ТЭИ: T_{ik}^{can} . Оказывается, однако, что более адекватен для многомерных задач так называемый метрический ТЭИ⁹⁰

$$T_{ik} = T_{ik}^{\text{can}} - \xi (\partial_i \partial_k - g_{ik} \partial_l \partial^l) \varphi^2, \quad (3.1)$$

где $\xi = \xi_c = (D - 2)/4(D - 1)$, D — размерность пространства-времени (заметим, что в одномерных задачах $\xi_c = 0$, при $D = 4$ $\xi_c = 1/6$).

Отметим, что формально в (3.1) допустимы все значения ξ , так как при разных ξ ТЭИ (3.1) отличаются на 4-дивергенцию. Обоснование выбора $\xi = \xi_c$ см. в гл. 5. а также в⁷⁸.

При всех значениях $\lambda \neq \infty$ спектр задачи непрерывен и аналогично одномерному случаю (раздел 2.8) для плотности энергии в области $|x| < a/2$ находим⁴⁰

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dq q \int_0^\infty \frac{dk}{\omega} \left[\omega^2 \sum_{j=1}^2 (A_j^2 - 1) + (\omega^2 - 2\xi_c k^2) (A_2^2 - A_1^2) \cos 2kx \right]; \quad (3.2)$$

здесь $\omega^2 = \mathbf{q}^2 + m^2 + k^2$, \mathbf{q} — двумерный вектор импульса в плоскости пластин, $\xi_c = 1/6$, величины A_j получаются аналогично разделу 2.8).

Повернем теперь контур интегрирования на $\pi/2$ и вычислим сначала интегралы по q . Результат приведем в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ (непрозрачные пластины):

$$\varepsilon = \varepsilon^f + \Delta(m, a, x),$$

где обозначено

$$\varepsilon^f = -\frac{1}{6\pi^2 a^4} \int_{\mu}^{\infty} \frac{(\zeta^2 - \mu^2)^{3/2} d\zeta}{e^{2\zeta} - 1}, \quad (3.3)$$

$$\Delta(m, a, x) = -\frac{2m^4}{3\pi^2} \int_1^{\infty} (y^2 - 1)^{1/2} \frac{\operatorname{ch} 2\mu(x/a)y}{\operatorname{sh} \mu y} dy \quad (3.4)$$

($\mu = ma$). Интеграл от ε в пределах $-a/2 \leq x \leq a/2$ дает, очевидно, энергию \mathcal{E} на единицу площади пластин (ввиду бесконечного объема системы нельзя говорить о полной энергии). Рассуждения раздела 2.10 остаются в силе для величин \mathcal{E} , \mathcal{E}^f , \mathcal{E}^{tot} на единицу площади; ввиду изменившейся размерности следует лишь в (2.57) считать $\mathcal{E}(m, ab) = \mathcal{E}(bm, a)/b^3$, а в (2.55) — $\mathcal{E}_{\text{ст}} = Jm^3$.

Для безмассового поля $\Delta \equiv 0$, так что $\mathcal{E} = a\varepsilon^f$. Из (3.3) при $\mu = 0$ для \mathcal{E} и силы F , действующей на единицу площади пластин (давления), имеем:

$$\mathcal{E} = -\frac{\pi^2}{1440a^3}, \quad F = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = -\frac{\pi^2}{480a^4} \quad (3.5)$$

(другим способом эти результаты были получены в ¹⁵).

В противоположном случае $\mu = ma \gg 1$ получаем экспоненциальное малое значение $\mathcal{E} \sim -\exp(-2\mu)$. Фактически все приводимые здесь результаты применимы и к пластинам конечной площади S при условии $a \ll S^{1/2}$.

Приведем также все компоненты вакуумного ТЭИ скалярного поля при $m = 0$ ¹⁵:

$$\langle T_{ik} \rangle = \frac{\pi^2}{1440a^4} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -3 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Как обсуждалось в разделе 2.10, в общем случае $m \neq 0$ адекватной характеристикой вакуумной энергии является \mathcal{E}^f , получаемая по рецепту (2.56). Поскольку величина ε^f из (3.3) экспоненциально убывает при $a' \rightarrow \infty$, с помощью (2.56) получаем

$$\mathcal{E}^f(m, a) = a\varepsilon^f(m, a) + R(m, a), \quad (3.7)$$

$$R(m, a) = \lim_{a' \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} (a\Delta(m, a, \xi) - a'\Delta(m, a', \xi)) d\xi, \quad (3.8)$$

причем в интегралах с Δ выполнены замены переменных $x/a \rightarrow \xi$, $x/a' \rightarrow \xi$.

Переставим теперь порядок интегрирования в R с учетом (3.4). Тогда окажется, что при любом значении u интеграл (3.8) по переменной ξ равен нулю, так что нужно принять $R(m, a) \equiv 0$, и $\mathcal{E}^f = a\varepsilon^f$ с ε^f из (3.3) при всех значениях m .

Очевидно, что интеграл по координате от $\Delta(m, a, x)$ не зависит от значения a и определяет энергию стенки $\mathcal{E}_{\text{ст}}$ (см. раздел 2.10). Непосредствен-

ное вычисление приводит к бесконечному значению $\mathcal{E}_{\text{ст}}$ ввиду возрастания $\Delta \sim -m^2 [x \pm (a/2)]^2$ вблизи стенки. При $\lambda \neq \infty$ (полупрозрачные стенки) асимптотически имеет место ⁴⁰ $\Delta \sim -m^2 [a (x \pm a/2)]^{-1}$ *).

3.2. Вакуумная энергия трехмерных ограниченных объемов

Изучение эффекта Казимира в случае областей со сложной, многопараметрической геометрией потребовало развития нетривиальных аналитических методов, позволяющих эффективно работать с многократными расходящимися суммами и интегралами.

Рассмотрим вакуумную энергию безмассового скалярного поля в параллелепипеде с ребрами a, b, c и нулевыми условиями на гранях (топология $I \times I \times I$). Ее вычисление, которое удобно проводить с помощью многократного применения формулы Абеля — Плана, приводит к результату ¹¹ (подробности выкладок, в том числе связанные с наличием у параллелепипеда граней и ребер, см. в приложении I)

$$\mathcal{E} = \left[-\frac{\pi^2}{1440a^4} + \frac{\zeta(3)}{32\pi a^3} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{\pi}{96a^2bc} - \frac{\pi}{a^4} \alpha \left(\frac{b}{a}, \frac{c}{b} \right) \right] abc; \quad (3.9)$$

здесь $\zeta(3) = 1,202$ — значение дзета-функции Римана, а α — некоторые интегралы, которые экспоненциально малы при $c \geq b \geq a$ как $\exp(-2\pi c/b)$, $\exp(-2\pi b/a)$. Без ограничения общности целесообразно всегда выбирать именно такой порядок обозначения сторон, когда α можно вообще откинуть (вклад α менее 1% даже для куба). При кубической конфигурации $a = b = c$ (с учетом α)

$$\mathcal{E} = -\frac{0,015}{a}. \quad (3.10)$$

При $a \ll b, c$ величина \mathcal{E}/bc из (3.9) асимптотически совпадает с энергией на единицу площади в случае бесконечных пластин (см. раздел 3.1).

Аналогично могут быть рассмотрены и другие варианты топологии, задаваемые заменой нулевых условий по одной или нескольким переменным на периодические ¹¹; см. п. 5.

Как и в одномерном случае, для массивного поля при выполнении условия $ma \gg 1$ энергия оказывается экспоненциально малой.

3.3. Электромагнитное поле между пластинами

Специфика электромагнитного поля состоит в его поперечности и так называемых естественных граничных условиях на стенках — обращении в нуль тангенциальных составляющих электрического поля:

$$\mathbf{E}_t = 0. \quad (3.11)$$

Для простейшего случая неограниченных плоскопараллельных пластин, расположенных на расстоянии a , при условии (3.11) значения вакуумной энергии и силы на единицу площади найдены еще Казимиром ¹:

$$\mathcal{E}^I = -\frac{\pi^2}{720a^3}, \quad F = -\frac{\pi^2}{240a^4}. \quad (3.12)$$

Этот результат легко получить предельными переходами из более общих результатов для вакуума электромагнитного поля внутри идеально проводя-

*) Отметим, что при $\xi \neq \xi_c$ даже для безмассового поля появляется особенность $\Delta \sim (\xi - \xi_c) [x \pm (a/2)]^{-4}$ ¹⁵, которую также следует относить к энергии стенки.

шего параллелепипеда (раздел 3.4) и между пластинами из реального металла (раздел 4.2). Заметим, что в соответствии с (3.12) пластины стремятся сблизиться, как и в случае скалярного поля.

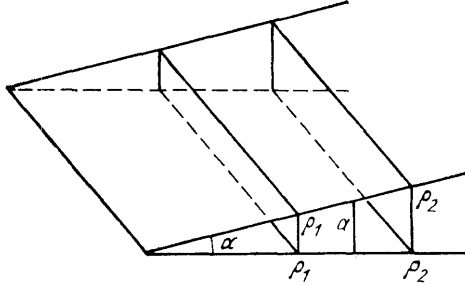


Рис. 3. Параметры, характеризующие клиновидную область

Вакуумный ТЭИ электромагнитного поля может быть рассчитан и для других достаточно симметричных конфигураций. Например, плотность энергии внутри двугранного угла с условиями (3.11) на гранях имеет вид¹⁶

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle = -\frac{1}{720\pi^2\rho^4} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} + 11 \right),$$

где обозначения ясны из рис. 3. Выполняя предельный переход $\alpha \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$ при условии $\alpha\rho = a$, мы возвращаемся к случаю параллельных пластин (3.12) (см. также²¹).

3.4. Электромагнитное поле в трехмерных ограниченных объемах

Собственные частоты параллелепипеда с условиями (3.11) на стенках те же, что для скалярного поля:

$$\omega^2 = \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right).$$

Условие (3.11) не требует обращения в нуль на стенках всех компонент электрического и магнитного полей. Поэтому теперь, в отличие от случая скалярного поля, возможны колебания с $n_1 = 0$, $n_2 \neq 0$, $n_3 \neq 0$ и перестановками n_i ; колебания же со всем набором $n_i \neq 0$ двукратно вырождены⁸⁴.

Приведем результат вычислений \mathcal{E} для квадратного резонатора, считая $a = b$ ^{11,13}:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}}{a^2c} &= -\frac{1}{a^4} \left[\frac{\pi^2}{720} + \frac{\zeta(3)}{16\pi} - \frac{\pi}{24} \frac{a}{c} \right], & a \leq c, \\ &= -\frac{1}{c^4} \left[\frac{\pi^2}{720} - \frac{\pi}{48} \left(\frac{c}{a} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{48} - \frac{\zeta(3)}{16\pi} \right) \left(\frac{c}{a} \right)^3 \right], & a \geq c. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для кубического объема (с учетом поправок типа α) полная вакуумная энергия электромагнитного поля равна

$$\mathcal{E} = \frac{0,0916}{a}, \quad (3.14)$$

что отличается знаком от аналогичной величины для скалярного случая (3.10).

Перейдем теперь к рассмотрению вакуумной энергии электромагнитного поля при наличии сферы радиусом R с граничным условием (3.11) на ней. Первоначально Казимир предполагал², что в случае сферы обусловленная вакуумной энергией сила, как и для параллельных пластин, соответствует притяжению и может, таким образом, уравновесить кулоновское отталкивание. Это давало надежду на реализацию модели элементарной частицы,

Все компоненты вакуумного ТЭИ электромагнитного поля между параллельными пластинами при условиях (3.11) на них есть

$$\langle T_{ik} \rangle = \frac{\pi^2}{720a^4} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -3 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что след ТЭИ $\langle T_i^i \rangle = 0$, как и должно быть для безмассовых полей.

в которой значение постоянной тонкой структуры α однозначно получалось бы из условия равновесия (в буквальном соответствии с предсказанием Фейнмана о том, что когда-нибудь α удастся выразить через корни функций Бесселя).

Фактически вакуумная энергия сферы была вычислена в работах ^{25–27}. Ввиду нерегулярности распределения собственных значений оператора Лапласа для шара эта задача решалась с применением численных методов, что привело к результату

$$\xi = 0,09235/2R,$$

очень близкому к значению (3.14) для куба со стороной $a = 2R$ (можно сказать, что вакуумная энергия «не залезает» в углы куба).

Положительность энергии сферы означает стремление сферы к расширению (силы расталкивания), что существенно отличается от случая двух параллельных пластин. Таким образом, предположение Казимира не подтвердилось (см., впрочем, раздел 6.1).

Представляет значительный интерес зависимость перенормированной плотности вакуумной энергии ε от расстояния до центра сферы. Оказалось, что при приближении к поверхности сферы $r = R$ величина ε неограниченно возрастает ²⁸:

$$\varepsilon \approx \frac{\text{const}}{R\rho^3}, \quad (3.15)$$

где $\rho \equiv R - r \ll R$.

Проследим, как согласовывается наличие неинтегрируемой сингулярности ε вблизи границы с приведенным выше конечным значением ξ для сферы.

Известно, что асимптотически при $k \rightarrow \infty$ плотность распределения собственных значений оператора Лапласа для трехмерной области объемом V , ограниченной поверхностью площади S со средней кривизной K , имеет вид ⁹¹

$$n(k) = \frac{V}{2\pi^2} k^2 - \frac{1}{8\pi} Sk + \frac{S}{6\pi^2} K + O(k^{-2}). \quad (3.16)$$

Вычитание вклада пространства Минковского, явно или неявно выполняемое в каждой процедуре регуляризации, заведомо убирает первый член (3.16), пропорциональный V . Член, пропорциональный S , связан с «поверхностной» энергией границ и различными возможными определениями ξ для массивного поля (см. раздел 2.10 и приложение II).

Средняя кривизна поверхности K имеет противоположные знаки для внутренней и внешней сторон границы. Вычисляя плотность энергии для внешнего пространства, мы обнаружим сингулярность вблизи поверхности сферы такую же, как в (3.15), но противоположного знака (это естественно содержится в (3.15), если учесть, что снаружи $\rho < 0$).

Таким образом, приведенное выше значение энергии сферы совпадает с ξ^{tot} по терминологии раздела 2.10): $\xi = \xi^{\text{tot}}$, т. е. ξ является энергией деформации вакуума во всем неограниченном пространстве при адиабатическом уменьшении прозрачности сферической границы от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$. При вычислении интеграла от ε по всему пространству в смысле главного значения указанные сингулярности компенсируются, что и дает приведенное выше конечное значение энергии (см. также ²⁹).

3.5. Может ли казимировская энергия проходить через ноль?

Из формулы (3.13) непосредственно следует, что вакуумная энергия электромагнитного поля в параллелепипеде с ребрами $a \times b \times c$ положительна при $a = b = c$ (т. е. для кубического объема), но меняет знак при «вытягивании» резонатора. Например, в частном случае квадратного сечения

$b = c$ энергия положительна в интервале

$$0,408 < \frac{c}{a} < 3,48,$$

проходит через нуль на концах его и отрицательна вне этого интервала. Аналогичное поведение энергии наблюдается и для некоторых других типов топологии, в том числе и при отсутствии стенок, т. е. с периодическими условиями по всем координатам (см. раздел 5.2). Смену знака вакуумной энергии следует ожидать также при деформации сферы в достаточно вытянутый эллипсоид.

Как отмечалось выше в разделе 2.10, в задачах без стенок определение является однозначным и не содержит произвола, связанного со слагаемыми типа (2.55) или поверхностным членом в (3.16). Таким образом, утверждение о знаке \mathcal{E} для таких задач имеет абсолютный характер (причем совпадающие значения \mathcal{E} получаются разными методами, см., например ^{11, 17}).

При наличии же границ энергия определена с точностью до константы; принятый выше ее выбор является, однако, физически оправданным, поскольку как силы, так и энергия стремятся к нулю при неограниченном увеличении размеров системы.

Рассматривая вопрос о возможности прохождения казимировской энергии через нуль, полезно отметить также случай проводящей цилиндрической поверхности, являющейся в определенном смысле промежуточным между конфигурациями двух параллельных пластин и сферы, для которых вакуумная энергия имеет разный знак. Действительно, в ^{29, 30} приближенными методами для цилиндра был получен нулевой результат. Однако в более поздней работе ³¹ найдено отрицательное значение энергии на единицу длины цилиндра, примерно в два раза превосходящее значение для резонатора квадратного сечения. Другой приближенный метод см. в ¹⁰³.

3.6. С п и н о р н о е п о л е

Формулировка условия непроницаемости на стенках требует в случае спинорного поля отдельного рассмотрения. Для получения физически обоснованного граничного условия необходимо исходить из модели взаимодействия с конкретным полем ¹⁸. В случае скачкообразного скалярного потенциала $V = V_0\theta(x)$, имитирующего границу (стенку) при $x = 0$, уравнение Дирака после отделения временной зависимости имеет вид

$$(\omega\gamma^0 + i\gamma\nabla - m - V_0\theta(x))\psi = 0. \quad (3.16')$$

Непроницаемость стенки соответствует пределу $V_0 \rightarrow \infty$. Очевидно, что член с V_0 может быть скомпенсирован только производной от ψ , т. е. при $x > 0$ $\psi \sim \exp(-V_0x)$. В силу непрерывности ψ при $x = 0$ на границе Γ справедливо условие

$$(i\mathbf{n}\psi + \psi)|_{\Gamma} = 0, \quad (3.17)$$

где \mathbf{n} — нормаль к границе.

Если же определять условие на границе с помощью более реалистического поля — 0-компоненты электромагнитного вектор-потенциала, то обеспечить непроницаемость барьера заданной высоты U для всех значений энергии оказывается невозможным. Это связано с тем, что при $|U - \omega| > m$ (ω — частота моды) возникает известный парадокс Клейна ⁹², т. е. согласно современной трактовке появляются взаимокомпенсирующиеся токи частиц и античастиц. Для конфигурации двух бесконечных параллельных пластин $x = 0$, $x = a$ можно искать частные решения (3.16) в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\frac{i\sigma\nabla\varphi}{m+\omega} \end{pmatrix}, \quad \varphi = (ue^{ikhx} + ve^{-ikhx})e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (3.18)$$

где u и v — постоянные спиноры, σ — вектор матриц Паули, \mathbf{q}, \mathbf{p} — двумерные векторы в плоскости пластин. Условия (3.17) с функциями ψ из (3.18), наложенные на двух пластинах, будут совместны лишь при

$$f(ka) \equiv \mu \sin ka + ka \cos ka = 0. \quad (3.19)$$

Если $\mu \equiv ma = 0$, то из (3.19) получаются значения $k_n = (\pi/a) [n + (1/2)]$. Поэтому при вычислении энергии необходимо пользоваться формулой суммирования по полуцелым числам (2.39). Это дает следующее значение вакуумной энергии на единицу площади пластин⁶⁶:

$$\mathcal{E} = -\frac{2\pi^2}{3a^3} \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^{2\pi y} + 1} = -\frac{7\pi^2}{2880a^3}. \quad (3.20)$$

Приведем также для полноты все компоненты ТЭИ нейтринного поля:

$$\langle T_{ih} \rangle = \frac{7\pi^2}{5760a^4} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}.$$

При $m \neq 0$ для суммирования по корням уравнения (3.19) используем принцип аргумента. В его основе лежит равенство⁹³

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \varphi(z) \frac{dz}{z} \ln f(z) dz = \sum \varphi(z_0) - \sum \varphi(z_\infty), \quad (3.21)$$

причем суммирование идет по нулям (точки z_0) и полюсам (точки z_∞) функции $f(z)$. Контур C выбирается так, чтобы в охватываемой им области содержались все корни функции $f(z)$ из (3.19).

В итоге получим выражение для вакуумной энергии \mathcal{E}^f , определенной в (2.56)¹⁸,

$$\mathcal{E}^f(a, \mu) = -\frac{1}{\pi^2 a^3} \int_\mu^\infty (x^2 - \mu^2)^{1/2} \ln \left(1 + \frac{x - \mu}{x + \mu} e^{-2x} \right) dx,$$

которое при $\mu = 0$ совпадает с (3.20), а при $\mu \gg 1$ дает $\mathcal{E}^f \sim e^{-2\mu}$.

В заключение данного раздела отметим, что для спинорного поля простейшее граничное условие $\psi = 0$ на границе неприемлемо, поскольку противоречит уравнению Дирака. Условие же (3.17) не только совместно с уравнением Дирака, но и обеспечивает выполнение естественного требования обращения в нуль тока частиц через границу.

4. УЧЕТ РЕАЛЬНЫХ СВОЙСТВ СРЕДЫ, ОГРАНИЧИВАЮЩЕЙ ОБЪЕМ КВАНТОВАНИЯ

4.1. Флуктуационное ван-дер-ваальсово взаимодействие — связь с эффектом Казимира

В связи с тем, что в некоторых задачах сила Казимира может рассматриваться как частный или предельный случай молекулярных (ван-дер-ваальсовых) сил, остановимся кратко на причинах возникновения и методах расчета последних^{36, 37}.

Допустим, что имеется два макроскопических тела, разделенных характерным расстоянием a . Основная часть энергии тел определяется взаимодействиями на атомных расстояниях d , т. е. короткодействием, и потому пропорциональна объему тел. Имеется, однако, небольшая составляющая энер-

гии, зависящая от формы и взаимного расположения тел. Для двух уединенных атомов эта энергия $\mathcal{E} \sim (d/a)^6$ соответствует взаимодействию двух взаимополяризующихся диполей, появляющихся вследствие квантовых флуктуаций распределения заряда в атомах. В твердых телах вследствие дальнего действия во взаимодействии участвует макроскопически большое число атомов. Поэтому силы удобно рассчитывать через флуктуационное электромагнитное поле, определяемое в равновесии диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями тел (хотя средние значения флуктуационных полей равны нулю, энергия и силы определяются квадратичными комбинациями этих полей, т. е. их корреляторами).

Первоначально в литературе сила определялась как компонента тензора напряжений, обусловленного флуктуационными полями ³².

Затем была использована линейная связь корреляторов равновесного поля с температурными функциями Грина $D_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ фотона в среде, так что тензор напряжений получался из D_{ik} применением некоторого линейного дифференциального оператора ^{33, 36}. Расходимость $D_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ устранялась заменой

$$D_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow D_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \bar{D}_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (4.1)$$

где \bar{D}_{ik} — функция Грина вспомогательной однородной неограниченной среды с той же диэлектрической проницаемостью, что у реальной среды в рассматриваемой точке. Такая процедура обосновывалась как устранение вклада коротковолновых флуктуации масштаба d , не имеющих отношения к данной задаче.

Сила Казимира для щели между металлами получается из этих расчетов предельным переходом $|\epsilon| \rightarrow \infty$, не зависящим от мнимости или вещественности ϵ .

Наконец, был предложен ^{35, 37} более простой и конструктивный способ расчета силы как производной от свободной энергии \mathcal{F} системы осцилляторов, собственные частоты которых $\omega_\alpha(a)$ определяются геометрией, а также ϵ и μ , т. е. решением классической электродинамической задачи, а равновесные числа заполнения осцилляторов

$$n(\omega_\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\omega_\alpha T) - 1} \quad (4.2)$$

при температуре $T \rightarrow 0$ переходят в характерные для нулевых колебаний половинки (при $T \rightarrow 0$ свободная энергия совпадает с энергией). Поскольку сумма по частотам, определяющая \mathcal{F} , расходится, для получения конечного результата применяется процедура регуляризации, по смыслу та же, что использованные выше.

В работе ³⁵ найдено доказательство справедливости такого подхода и при наличии поглощения, когда простые формулы типа (4.2) не имеют смысла; нестрого можно сказать, что поскольку \mathcal{F} определяется в конечном счете поведением ϵ на мнимой оси в комплексной плоскости ω , где всегда $\text{Im} \epsilon(i\xi) = 0$, наличие затухания, т. е. $\text{Im} \epsilon(\omega) \neq 0$ на вещественной оси, не существенно для применимости метода.

Расчет сил через спектр собственных частот по своим идеям близок к теории эффекта Казимира, но вовлекает в рассмотрение всю среду в неограниченном объеме, причем со свойствами, зависящими от координат.

Поэтому целесообразно иметь, в дополнение к приведенным выше, более простой метод, обобщающий изложенный в разделах 2, 3 подход на случай неидеальных границ модификацией граничного условия, которая минимально необходимым образом учитывала бы свойства среды. При этом отпадает необходимость явного рассмотрения области, занятой средой, что упрощает расчет, особенно для криволинейных и сложных областей.

4.2. Импедансное граничное условие отражает свойства среды

Как известно⁸⁴, проникновение электромагнитного поля внутрь реального металла можно эффективно учитывать с помощью наложения так называемого «импедансного» условия на границе

$$\mathbf{E}_t = Z(\omega) [\mathbf{H}_t \mathbf{n}], \quad (4.3)$$

где \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t — тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей, \mathbf{n} — внутренняя («в среду») нормаль к границе (рис. 4). Импеданс $Z(\omega)$ просто выражается через диэлектрическую $\varepsilon(\omega)$ и магнитную $\mu(\omega)$ проницаемости среды: $Z(\omega) = (\mu(\omega)/\varepsilon(\omega))^{1/2}$. При этом обычно $|Z| \ll 1$. Граничное условие (4.3) применимо и в тех случаях, когда $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ не имеют непосредственного смысла, например в области аномального скин-эффекта или для низкочастотных сверхпроводников.

Вместо $Z(\omega)$ часто используют функцию $\delta(\omega) = iZ(\omega)/\omega$, имеющую при $\delta = \text{Re } \delta$ смысл глубины проникновения электрического поля в материал пластин; наличие $\text{Im } \delta \neq 0$ учитывает затухание поля в среде. Очевидно, что идеальному металлу соответствует $Z = \delta = 0$, причем условие (4.3) переходит в этом случае в (3.11).

Рассмотрим вакуумную энергию и силы Казимира между двумя параллельными пластинами из реального металла, моделируемыми полупространствами, разделенными пустой щелью $-a/2 < x < a/2$ (рис. 4).

Определяя полную систему решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих граничным условиям (4.3) при $x = \pm a/2$, находим дисперсионные уравнения для спектра ω_n ³⁸:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\kappa a}{2} + \frac{1}{\kappa} \delta (Q^2 + \kappa^2) \cos \frac{\kappa a}{2} &= 0, \\ \cos \frac{\kappa a}{2} - \frac{1}{\kappa} \delta (Q^2 + \kappa^2) \sin \frac{\kappa a}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

а также

$$\cos \frac{\kappa a}{2} - \delta \kappa \sin \frac{\kappa a}{2} = 0, \quad \sin \frac{\kappa a}{2} + \delta \kappa \cos \frac{\kappa a}{2} = 0; \quad (4.5)$$

здесь \mathbf{Q} — двумерный вектор в плоскости пластин (y, z), $\kappa^2 \equiv \omega^2 - Q^2$.

Отметим, что спектр собственных частот в эффекте Казимира может быть определен также через коэффициенты отражения электромагнитных волн, которые приближенно выражаются через поверхностный импеданс³⁹.

В случае вещественных δ , а с ними и собственных частот ω_n для определения вакуумной энергии $E = (1/2) \sum_n \omega_n$ удобно воспользоваться принципом аргумента (3.21), на основе которого можно получить:

$$E(a, \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty dQ \frac{Q}{2\pi} \ln D(Q, i\xi), \quad (4.6)$$

где $Q = |\mathbf{Q}|$ и выполнены замены $\omega \rightarrow i\xi$, $\kappa \rightarrow i(\xi^2 + Q^2)^{1/2} \equiv iR$; D — функция, обращающаяся в нуль на каждом решении уравнений (4.4), (4.5). В качестве D можно взять произведение левых частей указанных уравнений.

При произвольных комплексных δ и собственные частоты $\omega = (\kappa^2 + Q^2)^{1/2}$, определенные как решения (4.4), (4.5), имеют мнимую добавку.

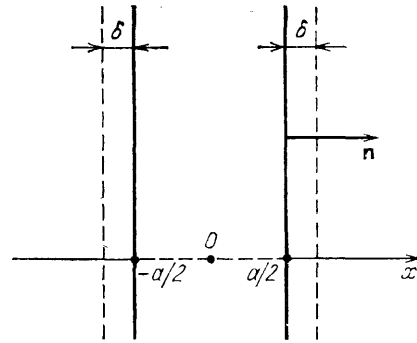


Рис. 4. Проникновение поля в реальную среду

Как отмечено в предыдущем разделе, результаты вычисления вакуумной энергии зависят лишь от поведения ϵ (и δ) на мнимой оси частот, где они заведомо вещественны. Поэтому формула (4.6) справедлива и в случае комплексных ω_n (после поворота контура $\omega \rightarrow i\zeta$ интеграл в (4.6) заведомо вещественный).

Для придания E конечного значения в данном случае целесообразно воспользоваться процедурой (2.56). В результате конечная величина ξ^t получается из (4.6) заменой функции D на

$$D_{\text{рег}} = D_0^2 \left[1 + \frac{4\sigma}{(1+\sigma)^2} \frac{1}{e^{2Ra} - 1} \right] \left[1 + \frac{4\delta R}{(1+\delta R)^2} \frac{1}{e^{2Ra} - 1} \right], \quad (4.7)$$

где обозначено

$$D_0 = 1 - \exp(-2Ra), \quad \sigma = \frac{\delta_0^2}{R}.$$

Как обычно, значение силы притяжения, действующей на единицу площади пластин, можно определить из соотношения $F = -\partial \xi^t / \partial a$.

Для идеальных пластин с $\delta = 0$ имеем $D_{\text{рег}} = D_0^2$, и из (4.6), (4.7) получаются уже известные результаты (3.12).

При $\delta \neq 0$ конкретные расчеты поправок к энергиям и силам Казимира на неидеальность металла пластин удобнее всего проводить с помощью теории возмущений по степеням малого параметра δ/a . В области микронных расстояний a между пластинами, обычно используемых в эксперименте, для металлов можно считать $\delta(\omega) = \delta_0 = \Omega^{-1}$, где Ω — эффективная плазменная частота⁸⁵. Для силы между пластинами в первых двух порядках по δ_0/a тогда получаем³⁸

$$F = -\frac{\pi^2}{240a^4} \left[1 - \frac{16}{3} \frac{\delta_0}{a} + 24 \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^2 \right]. \quad (4.8)$$

Поправка первого порядка из правой части (4.8) была найдена в³³ с коэффициентом, отличающимся примерно в 5 раз от истинного значения, полученного впервые в⁴¹.

Поскольку при $a \sim 1$ мкм для хороших металлов $\delta_0 \sim 0,1a$, очевидно, что поправки к силам Казимира на неидеальность материала пластин довольно существенны. Поправки на шероховатость пластин найдены в¹⁰⁴.

В работах³⁸ изложенная методика применена к различным зависимостям импеданса Z от частоты (аномальный скин-эффект, нормальный скин-эффект, сверхпроводящие пластины, металлические пластины с диэлектрическим покрытием, пластины из анизотропного материала) и показано, что во всех случаях она позволяет получать простые и наглядные выражения для соответствующих поправок к казимировским силам (см. также^{43,44}).

Говоря о поправках к классическому результату Казимира (3.12), следует упомянуть еще отклонения от него, возникающие при нарушении строгой параллельности пластин, и за счет конечности площади пластин. Так, если пластины шириной $l = \rho_2 - \rho_1$ (см. рис. 3) наклонены друг к другу под углом α , то из результата для двугранного угла (см. раздел 3.3) получается следующее значение силы, действующей на единицу площади пластин²⁴:

$$F = -\frac{\pi^2}{240a^4} \left[1 + \frac{10}{3} \left(\frac{\alpha l}{2a} \right)^2 \right], \quad (4.9)$$

где a — среднее расстояние между пластинами. При $l = 1$ см, $a = 1$ мкм, $\alpha \leq 2''$ поправка к силе на непараллельность не превышает 1 %.

Сравнивая формулы (3.13) для казимировской энергии параллелепипеда с (3.12), можно оценить поправки к (3.12) в случае пластин конечной площади S . Минимальные отклонения от силы (3.12) реализуются при вплотную поставленных к пластинам боковых металлических экранов и составляют для квадратных пластин относительную величину порядка $10a^2/S$. Например, при $S = 1$ см², $a = 1$ мкм эта величина равняется $10^{-5}\%$.

4.3. Температурные поправки

Имеется два пути влияния температуры на казимировские силы. Во-первых, непосредственно через температурные зависимости $\epsilon(T)$, $\mu(T)$; очевидно, эти зависимости исчезают с переходом к идеальному случаю $|\epsilon| \rightarrow \infty$. Во-вторых, при $T \neq 0$ сила определяется производной не от энергии, а от свободной энергии \mathcal{F} , являющейся функцией температуры (определения энергии и свободной энергии совпадают лишь при $T=0$). Зависимость $\mathcal{F} = \mathcal{F}(T)$ сохраняется и при идеальных, непроницаемых границах; именно такой случай и будет рассмотрен ниже на примере электромагнитного поля между идеально проводящими пластинами. В этом разделе для удобства изложения явно введем в формулы \hbar и c .

Характерным параметром является $T_0 = \hbar c/2a$ (константу Больцмана полагаем равной единице). На основе общих результатов³⁶ легко получить при $T/T_0 \ll 1$, $|\epsilon| \rightarrow \infty$

$$F = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{T}{T_0} \right)^4 \right]. \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) было ранее найдено несколько иным способом в³⁴.

Противоположный предельный случай $T/T_0 \gg 1$ означает $aT \gg \hbar c$. Подставляя сюда характерную частоту $\omega \sim c/a$, приходим к условию квазиклассичности $\hbar\omega \ll T$; следует поэтому ожидать выпадения \hbar из формулы для силы.

Это действительно имеет место, причем при $|\epsilon| \rightarrow \infty$ ³⁶

$$F = -\frac{T\zeta(3)}{8\pi a^3}. \quad (4.11)$$

Температурные поправки к силам Казимира исследованы и для других конфигураций границ, например для сферы²⁹.

4.4. Что измерено в эксперименте?

Казимировские силы между двумя параллельными металлическими пластинами впервые были измерены в работе³, которая дала качественное подтверждение теоретического результата (3.12) для силы притяжения. Пластины в данной работе изготавливались из хрома либо хромированного железа и размещались на расстоянии a от 0,5 до 2 мкм друг от друга. Первоначально пластины соприкасались, а затем раздвигались с помощью специальной механической системы. За счет действия сил Казимира растягивалась уравновешивающая их пружина, в результате чего изменялась емкость конденсатора C (см. схему эксперимента на рис. 5). Измерение C , в свою очередь, позволяло определять силы притяжения F между пластинами начиная со значений $\sim 10^{-4}$ дн.

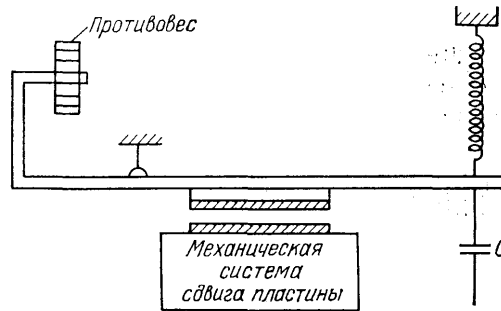


Рис. 5. Схема эксперимента по измерению казимировской силы

Относительная погрешность измерения F в³ составляла порядка 100 %, поскольку вследствие гистерезиса использованной механической системы значение a устанавливалось с погрешностью $\Delta a \approx 0,3$ мкм. Это и воспрепятствовало строгому, количественному подтверждению результата (3.12).

В дальнейшем ставились эксперименты по измерению сил притяжения между диэлектрическими телами, поскольку для них удавалось более точно измерять расстояния. Например, в⁴ на установке ампер-весов с обратной

связью исследовалось притяжение между сферической линзой и плоской пластиной, изготовленными из кварца. При этом погрешность измерения расстояния между телами составляла $\Delta a \approx 0,01$ мкм. Результаты измерения силы (полученные с относительной погрешностью $\approx 20\%$) оказались в хорошем согласии с предсказаниями теории (см. раздел 4.1).

Еще более прецизионные эксперименты описаны в работах ⁵, где измерялись силы между боковыми поверхностями двух стеклянных цилиндров с покрытием из слюды, расположенных перпендикулярно друг к другу. Применение многолучевой интерферометрии и метода полос равного хроматического порядка позволило измерять расстояние между цилиндрами с погрешностью $\Delta a \approx (2-3) \cdot 10^{-4}$ мкм. Относительная погрешность измерения сил между цилиндрами составила 5–10%, причем результаты в пределах этих погрешностей совпали с теоретическими предсказаниями (обзор литературы по измерению сил Ван-дер-Ваальса приведен в ⁶).

Во всех упомянутых экспериментах фактически наблюдались силы, вызванные наличием вакуумных колебаний электромагнитного поля. Нулевые колебания электрон-позитронного поля также косвенно наблюдаются на опыте через их вклад в лэмбовский сдвиг и аномальный магнитный момент электрона, находящегося в кулоновском поле атомного ядра.

Резюмируя, можно сказать, что хотя к настоящему времени флуктуационные силы между твердыми телами изучены на эксперименте достаточно детально, собственно результат Казимира для сил между плоскими пластинами из хорошего металла подтвержден лишь качественно. Поскольку именно этот случай наиболее характерен с точки зрения независимости силы от микроструктуры пластин, представляет интерес постановка новых прецизионных опытов по измерению сил Казимира между металлами.

О том, какую пользу эксперименты по измерению флуктуационных сил могут принести самым современным разделам физики элементарных частиц, пойдет речь в разделе 6.4 обзора.

5. НЕТРИВИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

5.1. Эффект Казимира на листе Мёбиуса

Лист Мёбиуса является простейшим двумерным неориентируемым многообразием, т. е. обладает нетривиальной топологией. Его наглядную модель можно получить, разрезав цилиндр (рис. 6, а) по образующей и снова склеив его с перекручиванием (рис. 6, б).

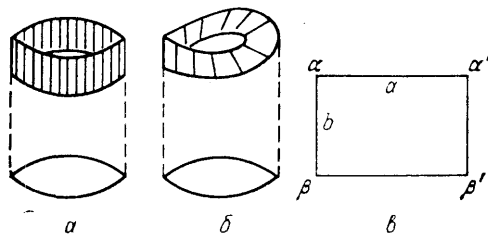


Рис. 6. Лист Мёбиуса и цилиндр

У листа Мёбиуса нет внутренней и внешней сторон. Начав чертить линию на середине полоски, через один оборот мы приходим в начальную точку с противоположной стороны полоски, а через два оборота замкнем линию.

Указанное наглядное представление требует выхода в третье измерение. Оставаясь в пределах двумерного многообразия, мы должны формально задать лист Мёбиуса отождествлением граничных точек «полоски» так, что $\alpha \equiv \beta'$, $\beta \equiv \alpha'$ (для цилиндра, очевидно, $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$) (рис. 6, в). Соответствующие условия для поля на листе Мёбиуса, заменяющие условие периодичности по длине на цилиндре, примут вид

$$\begin{aligned} \varphi(0, y) &= \varphi(a, b - y), & \varphi(x, 0) &= \varphi(x, b) = 0, \\ \partial_x \varphi(0, y) &= \partial_x \varphi(a, b - y). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Удовлетворяя условиям (5.1) с помощью произведения тригонометрических функций, найдем два семейства частот:

$$\begin{aligned}\omega_{mk}^{(1)} &= 2\pi \left\{ \left[\frac{m + (1/2)}{a} \right]^2 + \left(\frac{k}{b} \right)^2 \right\}^{1/2}, & k \geq 1, \\ \omega_{mk}^{(2)} &= 2\pi \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left[\frac{k + (1/2)}{b} \right]^2 \right\}^{1/2}, & k \geq 0,\end{aligned}\quad (5.2)$$

где всюду $-\infty < m < \infty$.

Перенормированная энергия, получаемая применением формул типа Абеля — Плана (2.35), (2.39), имеет вид (с экспоненциальной точностью)¹²

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{\pi}{24a} \left(-\frac{3\zeta(3)}{2\pi^2} l - 1 + l^{-1} \right), & l > 1, \\ &= -\frac{\zeta(3)}{16\pi a} l^{-2}, & l < 1,\end{aligned}\quad (5.3)$$

где $l \equiv b/a$.

Аналогичные вычисления для поверхности цилиндра дают¹²

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c &= \frac{\pi}{24a} \left(-\frac{12\zeta(3)}{\pi^2} l + 2 - l^{-1} \right), & l > \frac{1}{2}, \\ &= -\frac{\zeta(3)}{16\pi a} l^{-2}, & l < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Таким образом, различие в энергиях исчезает при малом значении l (практически при $l < 1/2$), т. е. топологические различия перестают играть роль при удалении топологически неэквивалентных границ.

Заметим, что проекция цилиндра или листа Мёбиуса на плоскость — окружность S^1 называют базой расслоения, а образующие ширины полосы отрезки I — слоями. Цилиндр рис. 6, a является прямым произведением $S^1 \times I$, а лист Мёбиуса — нет, т. е. имеет место нетривиальное расслоение (ср. с разделом 2.6).

5.2. 3-гор и другие топологии

Трехмерные задачи дают несколько вариантов изменения топологии путем формальной замены одного или нескольких отрезков I в параллелепипеде $I \times I \times I$ на окружность S^1 . Подробные результаты для различных видов полей и топологий приведены в^{9, 11}.

В качестве примера обсудим среднюю плотность вакуумной энергии для безмассового спинорного поля в конфигурации 3-тора $S^1 \times S^1 \times S^1$, получаемого отождествлением противоположных граней параллелепипеда; стенок при этом нет. Условия периодичности приводят при $a \leq b \leq c$ к результату для вакуумной плотности энергии:

$$\varepsilon = \frac{2\pi^2}{45a^4} + \frac{2\zeta(3)}{\pi ab^3} + \frac{2\pi}{3abc^2}$$

(как и в гл. 3, экспоненциально малые слагаемые отброшены).

Очевидно, здесь $\varepsilon > 0$ при всех соотношениях сторон (причем $\varepsilon \approx 3,23a^{-4}$ при $a = b = c$). Однако для электромагнитного поля в этой же конфигурации знак ε изменяется при изменении соотношения сторон. Так, при $a = b = c$ имеет место $\varepsilon = 0,0932/a^4$, а при $a = b \neq c$ энергия сохраняет знак в интервале $0,478 < c/a < 3,26$.

Для безмассового скалярного поля в конфигурации 3-тора при $a = b = c$ имеет место результат¹⁹ $\varepsilon \approx -0,8375 a^{-4}$ (случаи конфигураций $S^1 \times S^1$ и $S^1 \times S^1 \times R^1$ см. в приложении II). Интересно отметить, что для спинорного поля с более естественными для него антипериодическими условиями отождествления противоположных граней параллелепипеда [см. (2.37) и аналогично по переменным y, z] также получается отрицательная плотность

казимировской энергии. Так, для двухкомпонентного нейтринного поля⁵⁶ $\epsilon \approx -0,3914a^{-4}$, т. е. скрученная конфигурация спинорного поля энергетически оказывается более выгодной.

Другие результаты, в частности для конфигурации $S^1 \times I \times I$, эквивалентной обычному тору, содержатся в работах^{9, 11, 19}.

5.3. Эффект Казимира на сфере

Обратимся теперь к рассмотрению вакуумной энергии на сфере S^2 , т. е. двумерной поверхности шара. Этот пример интересен не только новым типом топологии, но и наличием кривизны; он полезен как простой аналог космологических задач.

Метрика на сфере радиусом a имеет вид

$$ds^2 = a^2 (d\eta^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (5.4)$$

где введена временная переменная $\eta = t/a$. Скалярная кривизна $R = 2a^{-2}$.

Для нахождения спектра частот необходимо прежде всего обобщить уравнение Клейна — Фока на случай произвольной метрики g_{ik} . Простейший способ — заменить обычные производные ∂_k на ковариантные ∇_k :

$$(\nabla_k \nabla^k + m^2) \varphi = 0. \quad (5.5)$$

Такой способ учета кривизны пространства в уравнении скалярного поля называется минимальной связью. Уравнение при этом не удовлетворяет требованию так называемой конформной инвариантности, т. е. не существует такого преобразования поля $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$, что волновое уравнение сохраняет свою форму при отображении ($m = 0$)

$$g_{ik} \rightarrow \tilde{g}_{ik} = e^{-2\sigma(x)} g_{ik}. \quad (5.6)$$

Физически конформная инвариантность означает требование одинакового поведения в римановых пространствах (5.6) безмассовых частиц, не вносящих в задачу масштаба m^{-1} . Она выполняется для так называемого уравнения с конформной связью ($m = 0$)⁹⁴

$$(\nabla_k \nabla^k + \xi R + m^2) \varphi = 0, \quad (5.7)$$

где $\xi = \xi_c = (D - 2)/4(D - 1)$ совпадает с введенной в гл. 3 константой. Варьированием по метрике лагранжиана, соответствующего (5.7), получается метрический ТЭИ (см. раздел 3.1 в случае пространства Минковского).

Для вещественного скалярного поля

$$T_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_i \varphi \nabla_k \varphi + \nabla_k \varphi \nabla_i \varphi) - \frac{1}{2} g_{ik} [\nabla_l \varphi \nabla^l \varphi - (m^2 + \xi R) \varphi^2] - \xi (R_{ik} + \nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla_l \nabla^l) \varphi^2. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.7) при $\xi = 1/8$ (так как $D = 3$) принимает вид

$$\partial_\eta^2 \varphi - \Delta \varphi - \left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} \right) \varphi = 0$$

и имеет следующие собственные функции и частоты:

$$\varphi_{lm}(\eta, \theta, \varphi) = \frac{1}{(2\omega_l)^{1/2}} e^{i\omega_l \eta} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad \omega_l^2 = m^2 a^2 + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (5.9)$$

где Y_{lm} — сферические функции.

В данной задаче ТЭИ заведомо не зависит от координат; на основе (5.8) и (5.9) после перенормировки получим¹²

$$\langle T_i^k \rangle = \frac{m^3}{4\pi} \left[S_1(ma) \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} + S_{-1}(ma) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right], \quad (5.10)$$

$$S_n(\mu) = \int_0^1 (1-p^2)^{n/2} p [\exp(2\pi p\mu) + 1]^{-1} dp.$$

Из (5.10) следует, что для безмассового поля энергия Казимира на сфере обращается в нуль. В предельных случаях

$$\varepsilon = \frac{m^3}{12\pi} \quad (\mu \ll 1), \quad \varepsilon = \frac{m}{96\pi a^2} \quad (\mu \gg 1). \quad (5.11)$$

Поведение (5.10) и (5.11) отличается как от ранее рассмотренных, так и от аналогичной задачи с $D = 4$ (см. раздел 5.4).

5.4. Э ф ф е к т К а з и м и р а в к о с м о л о г и и

Космология дает нам, быть может, самый грандиозный пример использования в физике пространства с неевклидовой топологией. Как известно⁴⁶, в инфляционных моделях Вселенной 3-пространство замкнуто (или ограничено стенкой пузыря), вследствие чего вакуумный ТЭИ содержит вклад топологической природы, который становится существенным на ранних стадиях эволюции.

Здесь мы приведем результаты вычисления эффекта Казимира в важнейшем для космологии случае однородных изотропных моделей закрытого типа (сечения $t = \text{const}$ есть 3-сферы с топологией S^3) и обсудим возможную роль казимировской плотности энергии при изучении Вселенной.

В сопутствующих координатах метрика однородного изотропного пространства-времени закрытого типа имеет вид⁹⁵

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = a^2(\eta) (d\eta^2 - dl^2), \quad (5.12)$$

где $\eta = \int dt/a(\eta)$, dl^2 — метрика 3-пространства с кривизной $+1$ ($0 \leq \chi \leq \pi$),

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.13)$$

Для степенных масштабных факторов $a(\eta)$ (5.12), (5.13) является метрикой закрытой модели Фридмана, а в случае $a = a_0/\cos \eta = a_0 \text{ch}(t/a_0)$ — модели Де-Ситтера, соответствующей экспоненциальному «раздуванию» 3-пространства (напомним, что $a(t)$ имеет смысл радиуса кривизны 3-пространства в момент t).

В отличие от всех рассмотренных выше задач, которые были стационарными, здесь величина a , определяемая при решении уравнений Эйнштейна, зависит от времени. Это приводит к тому, что, помимо казимировского вклада в вакуумный ТЭИ (связанного с отличием топологии 3-пространства от евклидовой), имеются дополнительные поляризационные слагаемые, зависящие от производных масштабного фактора, а также члены, описывающие рождение частиц из вакуума гравитационным полем.

Принципиальные вопросы, связанные с рождением частиц из вакуума внешними полями, рассматривались в работах^{47-49, 61, 62}. Здесь важно отметить⁵⁰, что сама возможность этого эффекта в гравитационном поле связана с нарушением в квантовой теории условий энергодоминантности $\varepsilon \geq 0$, $|P| \leq \varepsilon$, $\varepsilon + 3P \geq 0$ (ε — плотность энергии, P — давление квантованных полей в вакуумном состоянии), которые начинают выполняться лишь после «окончательного» превращения виртуальных частиц в реальные.

Определяемая производными от a поляризация вакуума связана с квадратичными по кривизне членами в эффективном лагранжиане гравитационного поля^{96, 97}; для нее также могут нарушаться условия энергодоминантности. Полная теория эффектов рождения частиц и поляризации вакуума в гравитационном поле изложена в^{7, 8}, здесь же остановимся только собственно на эффекте Казимира, имеющем место и при $da/d\eta = 0$.

Разделяя переменные в уравнении Клейна — Фока (5.7) в метрике (5.12), (5.13) и вычисляя вакуумное среднее от ТЭИ (5.8), в итоге имеем

$$\begin{aligned}\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle &= \frac{1}{4\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \omega_n, \quad \omega_n = (m^2 a^2 + n^2)^{1/2}, \\ \langle 0 | T_{\alpha\beta} | 0 \rangle &= \frac{1}{12\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\omega_n} \gamma_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Такие же выражения получаются и для плоского пространства Минковского (с заменой сумм на интегралы от 0 до ∞).

Регуляризация результатов (5.14) осуществляется с помощью процедуры (2.33), т. е. отбрасыванием вклада пространства Минковского, касательного к рассматриваемому риманову пространству в данной точке. С помощью метода размерной регуляризации можно убедиться^{51–53}, что такая процедура в точности эквивалентна перенормировке космологической постоянной Λ в эффективном лагранжиане гравитационного поля (вопрос о физическом значении Λ_{ren} обсуждается в⁴⁵). На практике процедуре (2.33) соответствует использование формулы Абеля — Плана (2.35). В итоге получаем⁵⁴

$$\begin{aligned}\langle T_{00} \rangle &= \frac{1}{2\pi^2 a^2} \int_{ma}^{\infty} \frac{\lambda^2 (\lambda^2 - m^2 a^2)^{1/2} d\lambda}{\exp(2\pi\lambda) - 1}, \\ \langle T_{\alpha\beta} \rangle &= \frac{1}{6\pi^2 a^2} \int_{ma}^{\infty} \frac{\lambda^4 (\lambda^2 - m^2 a^2)^{-1/2} d\lambda}{\exp(2\pi\lambda) - 1} \gamma_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Отметим, что величины (5.15) определены однозначно, поскольку рассматриваемое пространство-время не имеет границ.

Для безмассовых частиц интегралы в (5.15) вычисляются аналитически^{19, 55}:

$$\langle T_{00} \rangle = \frac{1}{480\pi^2 a^2}, \quad \langle T_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{1440\pi^2 a^2} \gamma_{\alpha\beta}.\tag{5.16}$$

Распределение по λ в (5.15) при $m = 0$ совпадает с бозевским спектральным распределением с эффективной температурой $T_0 = 1/2\pi a$ ^{54, 63}.

Для $m \neq 0$ величины $\langle T_{ik} \rangle$ найдены в работе⁵⁵ численными методами в интервале $0 \leq ma \leq 1,5$. Оказалось, что при $ma \geq 0,5$ казимировский ТЭИ массивного поля перестает удовлетворять условиям энергодоминантности. При $ma \gg 1$ с помощью леммы Ватсона можно получить⁵⁴

$$\begin{aligned}\langle T_{00} \rangle &\approx \frac{(ma)^{5/2}}{8\pi^3 a^2} e^{-2\pi ma}, \\ \langle T_{\alpha\beta} \rangle &\approx \frac{(ma)^{7/2}}{12\pi^2 a^2} \gamma_{\alpha\beta} e^{-2\pi ma}.\end{aligned}$$

В случае безмассового спинорного поля аналогичные (5.16) результаты имеют вид^{19, 55}

$$\langle T_{00} \rangle = \frac{17}{960\pi^2 a^2}, \quad \langle T_{\alpha\beta} \rangle = \frac{17}{2880\pi^2 a^2} \gamma_{\alpha\beta},\tag{5.17}$$

причем спектральное распределение является фермиевским с той же эффективной температурой T_0 , что и для скалярного поля.

Наличие казимировских вкладов вида (5.16), (5.17) в вакуумном ТЭИ еще раз демонстрирует, что глобальная структура пространства-времени отражается в локальных свойствах физического вакуума. Этот факт предоставляет нам захватывающую принципиальную возможность реконструкции топологической структуры Вселенной в целом, в частности решения проблемы конечности-бесконечности 3-пространства, по результатам чисто локальных измерений.

Казимировские слагаемые (5.16), (5.17) в составе полного вакуумного ТЭИ играют важную роль при построении так называемых самосогласованных моделей Вселенной, в которых гравитационное поле создается вакуумным ТЭИ как источником согласно уравнениям Эйнштейна, и наоборот, вакуум поляризуется этим самым гравитационным полем⁵⁷⁻⁵⁹. Обнаружение таких моделей позволило на серьезной научной основе анализировать гипотезу о том, что той первоосновой, из которой произошла вся окружающая нас Вселенная, является физический вакуум⁶⁰.

Актуальность эффекта Казимира в космологии связана и с возможной топологической нетривиальностью 3-пространства Вселенной. Так, в работе³⁶ рассмотрено квантовое рождение Вселенной с плоским 3-пространством, обладающим топологией 3-тора. При этом подстановка просуммированной по всем полям казимировской плотности энергии $\epsilon = -Aa^{-4}$ ($A > 0$; см. раздел 5.2) в правую часть уравнений Эйнштейна позволяет получить несингулярную космологическую модель инфляционного типа. Эффект Казимира в суперсимметричных и супергравитационных теориях в связи с проблемой квантового рождения Вселенной с нетривиальной топологией рассматривался также в⁶⁴.

6. ЭФФЕКТ КАЗИМИРА В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

6.1. Вакуумная энергия в модели мешков

Упрощенно-феноменологическое описание строения адронов в рамках квантовой хромодинамики (КХД) дает так называемая модель мешков⁶⁵, согласно которой адроны представляют собой пузырьки в КХД-вакууме, заключающие кварки и глюоны, причем их токи через стенки пузырька равны нулю (т. е. имеет место конфайнмент). Поскольку КХД-вакуум обладает отрицательной плотностью энергии, его отсутствие в пузырьке эквивалентно объемной положительной энергии. Соотношение последней с энергией типа поверхностного натяжения ($\mathcal{E} \sim a^{-1}$), содержащей и казимировский вклад, определяет радиус пузырька a , массу адрона и другие наблюдаемые характеристики.

При отсутствии реальных кварков казимировская энергия мешка обусловлена квантовыми флуктуациями кварковых и глюонных полей. Два вклада в эту энергию вносят кварковое поле, описываемое уравнением Дирака, и цветное глюонное поле, приближенно удовлетворяющее уравнениям, аналогичным уравнениям Максвелла с переменной ролью электрического и магнитного полей¹⁰.

Для сферической полости радиусом a с условиями непроницаемости типа (3.17) на границе в пренебрежении массами кварков получен результат⁶⁷

$$E_q \approx -\frac{1}{144\pi a} + \frac{1}{3\pi a \delta^2} \quad (6.1)$$

Расходящийся при устремлении параметра обрезания к нулю член в (6.1) компенсируется противоположным по знаку членом для внешних мод⁶⁸ (т. е. конечной остается \mathcal{E}^{tot} ; ср. раздел 3.4). В итоге рассмотрения вкладов как внутренней, так и внешней области в работе⁶⁸ приведен положительный

конечный ответ

$$\xi_q^{\text{tot}} \approx \frac{0,02}{a}. \quad (6.2)$$

В случае глюонов, с учетом условий для цветных электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей на границе (\mathbf{n} — внешняя нормаль)

$$\mathbf{nE} |_{\Gamma} = 0, \quad [\mathbf{nB}] |_{\Gamma} = 0, \quad (6.3)$$

вместо (6.1) было найдено выражение ^{22, 67, 68}

$$E_g \approx \frac{11}{72\pi a} - \frac{4}{3\pi a \delta^2}, \quad (6.4)$$

зависящее от параметра обрезания δ (см. также ⁷⁰).

Конечное значение ξ_g^{tot} глюонного поля может быть получено на основе известного результата для казимировской энергии сферы с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_1, μ_1 , помещенной в бесконечную среду с характеристиками ϵ_2, μ_2 , причем $\epsilon_1\mu_1 = \epsilon_2\mu_2 = 1$ ⁶⁹

$$\xi_{\mu}^{\text{tot}}(a) = \xi^{\text{tot}}(a) \left(\frac{\mu_{12} - 1}{\mu_{12} + 1} \right)^2 \left[1 + 0,311 \frac{\mu_{12}}{(\mu_{12} + 1)^2} \right], \quad (6.5)$$

где $\mu_{12} \equiv \mu_1/\mu_2$, $\xi^{\text{tot}}(a) \approx 0,092/2a$ совпадает с энергией идеально проводящей сферы из раздела 3.4.

Как видно из условий (6.3), казимировская энергия глюонного поля получается из (6.5) при условиях $\mu_1 = 1, \mu_2 \rightarrow \infty$, т. е. $\mu_{12} \rightarrow 0$, и совпадает с $\xi^{\text{tot}}(a)$. Результат, учитывающий вклад всех компонент глюонного поля, составляет $8\xi^{\text{tot}}(a)$.

Отнеся энергию

$$8\xi^{\text{tot}}(a) - 3\xi_q^{\text{tot}} \approx \frac{0,43}{a}$$

при радиусе нуклона $a \sim 1$ фм к его массе, получим оценку относительной роли казимировской энергии в энергии мешка $\approx 9\%$. Заметим, однако, что на практике значения параметров, определяющих энергию мешка, рассматриваются как свободные и подбираются для наилучшего согласия со спектром и магнитными моментами адронов.

6.2. Многомерные теории поля типа Калуцы — Клейна

В последние годы возродился и усиливается интерес к построению моделей теории поля типа Калуцы — Клейна. В основе всех таких моделей, несмотря на их разнообразие, лежит одна ведущая идея: истинная размерность пространства-времени $D = 4 + N > 4$, однако $N > 0$ измерений «спонтанно компактифицированы», т. е. образуют N -мерное компактное пространство, геометрические размеры которого порядка планковских $a \approx \approx l_{pe} = G^{1/2} \approx 10^{-33}$ см (где G — гравитационная постоянная). В наиболее простых моделях вообще выполняют предельный переход $a \rightarrow 0$. Эти дополнительные N измерений непосредственно не наблюдаемы, но их наличие неявно сказывается на виде уравнений движения, получаемых для четырехмерного пространства из исходных уравнений $(4 + N)$ -мерной теории. В связи с этим говорят, что обычная 4-мерная физика есть низкоэнергетическое приближение к более общей $(4 + N)$ -мерной теории ^{74, 87}.

Первая теория такого рода была предложена Калуцей ⁷¹ и поддержана Клейном ⁷² и касалась объединения гравитации и электромагнетизма в 5-мерной теории гравитации.

Приведем простейший нетривиальный пример, иллюстрирующий возможности подобной теории ^{73, 74}. Действие для гравитационного поля в 5-мерном

пространстве-времени имеет вид

$$S^{(5)} = \frac{1}{16\pi G_5} \int |g^{(5)}|^{1/2} R^{(5)} d^5x, \quad (6.6)$$

где $R^{(D)}$ — скалярная кривизна, g_{AB} — пятимерная метрика, которую выберем в виде

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{nm} + A_n A_m & A_m \\ A_n & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{(5)} \equiv \det g_{AB}; \quad (6.7)$$

здесь $n, m = 0, 1, 2, 3$, A_n — некоторые 4-векторные функции. Топология данного многообразия $M^4 \times S^1$, где S^1 , как и ранее, означает окружность радиусом a (по пятой координате x^4). Предполагая обычную для подобных моделей независимость g_{AB} от x^4 , после подстановки (6.7) в (6.6) и интегрирования по x^4 получим эффективное действие

$$S^{(4)} = - \frac{1}{16\pi G} \int |g^{(4)}|^{1/2} \left(R^{(4)} + \frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} \right) d^4x, \quad (6.8)$$

в котором «спонтанно» возник характерный для электромагнитного поля $U(1)$ -калибровочный член с $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$ ⁷⁴.

В обычных обозначениях роль калибровочного поля в (6.8) должна играть величина $\tilde{A} = (16\pi G)^{-1/2} A$; это позволяет связать электрический заряд частицы с G и дать качественные оценки вероятных значений a ⁷⁴.

В настоящее время идеи компактификации широко используются в различных вариантах суперсимметричных теорий, в том числе теорий супергравитации⁸⁷. Один из возможных механизмов спонтанной компактификации связан с самосогласованным учетом казимировского ТЭИ в правой части уравнений Эйнштейна (см. следующий раздел).

6.3. Компактификация за счет казимировской энергии

Уравнения Эйнштейна в $(4 + N)$ -мерном пространстве-времени имеют вид

$$R_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} R = G^{(D)} (\langle T_{AB} \rangle + \Lambda g_{AB}), \quad (6.9)$$

где R_{AB} — тензор Риччи, $G^{(D)}$ — гравитационная постоянная, связанная с обычной величиной G соотношением $G^{(D)} = GV(S^N)$, V — объем N -мерной сферы S^N , $\langle T_{AB} \rangle$ — перенормированный казимировский ТЭИ.

Будем искать решение (6.9), соответствующее многообразию $M^4 \times S^N$. Соответственно метрика и тензор Риччи примут вид

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} \eta_{mn} & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad R_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{N} g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

где η_{mn} — метрика пространства Минковского M^4 , $g_{\mu\nu}$ — метрика на N -мерной сфере радиуса a , R — скалярная кривизна на ней⁷⁵⁻⁷⁷.

Вид (6.10) совместен с уравнениями (6.9), если ТЭИ также имеет блочный вид, причем

$$\langle T_{mn} \rangle = T_1 \eta_{mn}, \quad \langle T_{\mu\nu} \rangle = T_2 g_{\mu\nu}. \quad (6.11)$$

След ТЭИ считаем, как обычно, равным нулю: $g_{AB} \langle T^{AB} \rangle = 0$. Величину T_1 положим равной плотности казимировской энергии квантованных полей $T_1 = \langle T_{00} \rangle$; из соображений размерности для безмассовых полей $T_1 = C/a^D$. Подстановка (6.10) и (6.11) в (6.9) приводит к следующим

условиям, которым должны удовлетворять свободные параметры a и Λ :

$$a^{2+N} = -\frac{CDG^{(D)}}{N(N-1)}, \quad \Lambda = -\frac{N(N-1)(N+2)}{2a^2D}.$$

Очевидно, необходимо $C < 0$; при $N = 2$ значения C для бозонных $C_1 \approx -1 \cdot 10^{-4}$ и фермионных $C_2 \approx 9 \cdot 10^{-4}$ полей приведены в ⁷⁷ (при этом $G^{(6)} = 4\pi a^2 G$). Таким образом, с точностью до постоянной, определяемой суммой C_i по всем возможным полям, получаем $a \sim G^{1/2}$, т. е. в данной модели при достаточно большом числе бозонных полей действительно имеет место спонтанная компактификация с характерным размером порядка планковского. Случай нечетных N изучен в ⁷⁶.

Отметим, что компактификация в космологических теориях типа Калуцы — Клейна за счет эффекта Казимира рассматривалась в работах ⁸²⁶ в связи с возможностью возникновения инфляционного режима эволюции Вселенной.

6.4. Уточнение констант физики частиц с помощью эффекта Казимира

Как известно, в современной теории элементарных частиц введено немало гипотетических легких или безмассовых частиц (аксион, скалярный аксион, арион, аксино и др.; см. обзор ⁷⁹). В частности, легкие скалярные частицы должны возникать вследствие нарушения любой глобальной симметрии в суперсимметричной теории.

Наличие легких или безмассовых частиц приводит к появлению новых (по отношению к электромагнитным и гравитационным) дальнедействующих сил между макроскопическими телами ^{82a}. Эти силы могут быть зафиксированы в экспериментах по измерению сил Казимира, если будут обнаружены отличия между экспериментальным значением силы и соответствующим теоретическим предсказанием. В любом случае измерения сил Казимира позволяют дать ограничения на дополнительные (не казимировские) силы между макротелами, возникающие за счет обмена гипотетическими легкими частицами. Тем самым появляется возможность получения ограничений на константы подобных частиц.

В работе ⁷⁸ из анализа результатов давно выполненных работ по измерению сил Казимира между плоскостью и сферической линзой ^{5, 6} найдено ограничение на массу m и юкавскую константу связи с фермионами f легкой скалярной частицы

$$\frac{f}{m^3} < 10^{-13} (\text{эВ})^{-3}. \quad (6.12)$$

Если применить это ограничение к суперсимметричной теории Великого объединения с масштабом объединения $\sim 10^{17}$ ГэВ, в которой содержится $U(1)$ -симметрия Печчи — Квина, нарушенная на том же масштабе, то, понимая под легкой скалярной частицей скалярный аксион, получим для масштаба нарушения суперсимметрии оценку $M > 10^3$ ГэВ ⁷⁸ (отметим, что в моделях с ненарушенной суперсимметрией эффект Казимира отсутствует ⁸⁰). Данная оценка является наилучшей из всех, полученных другими методами (в том числе и из данных астрофизики); см. также ⁸¹.

Как показано в работе ⁷⁸, эффект Казимира вообще является наилучшим средством поиска дальнедействующих сил, обусловленных скалярными частицами, в широком интервале констант связи $10^{-18} < f < 10^{-9}$ и масс 10^{-6} эВ $< m < 10$ эВ. В работах ^{82b} с помощью эффекта Казимира улучшены наиболее сильные известные ограничения сверху на константы гипотетических дальнедействующих сил, убывающих по степенному закону $F \sim r^{-n}$ (при $n = 3$ — на порядок, при $n = 4$ — в двести раз). Поэтому постановка новых прецизионных экспериментов по измерению казимировских сил может оказаться решающей в плане проверки предсказаний суперсимметричных теорий.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано выше, широкий класс явлений, в которых вакуум квантованных полей приобретает некоторую плотность энергии вследствие ограничения объема квантования или отличия топологии многообразия от евклидовой, может быть единообразно истолкован и описан как эффект Казимира. Возникновение силы Казимира между макротелами есть, по существу, макроскопическое проявление нулевых колебаний электромагнитного поля. Наблюдаясь в локальных измерениях, данный эффект оказывается своеобразным источником информации о топологической структуре мира в целом. В этой связи неудивительна широта и плодотворность различных его приложений: в макрофизике, космологии, физике адронов, в суперсимметрии и супергравитации, при уточнении констант физики элементарных частиц.

С эффектом Казимира связаны большие ожидания: он может стать новым тестом для проверки предсказаний фундаментальных физических теорий.

Не все задачи, относящиеся к расчету казимировских энергий и сил, имеют к настоящему времени достаточно удовлетворительное решение. Так, требует дальнейшего исследования проблема поверхностных расходимостей. Многие еще, несомненно, будет сделано в развитии приближенных методов расчета эффекта Казимира для более сложных конфигураций границ.

Целью данного обзора являлось изложение физико-математических основ эффекта Казимира и указание на его важнейшие приложения. По каждому из них в списке литературы можно найти обширный дополнительный материал, содержащий модельно зависимые результаты и детали.

В заключение считаем своим долгом выразить признательность покойному Я. Б. Зельдовичу за поддержку идеи написания данного обзора и ряд полезных советов по его содержанию, которые он дал авторам весной 1986 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Проиллюстрируем методику вычисления вакуумной энергии с помощью многократного применения формул Абеля — Плана на примере двукратной суммы

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} s_n, \quad s_n = \sum_{m=1}^{\infty} (n^2 + m^2)^{1/2}, \quad (\text{П.1})$$

где для краткости коэффициенты перед n , m положены равными единице.

Прежде всего, фиксируя n , вычисляем с помощью (2.35) сумму по m :

$$s_n = \int_0^{\infty} (n^2 + x^2)^{1/2} dx - \frac{n}{2} + 2I(n), \quad (\text{П.2})$$

$$I(z) = - \int_z^{\infty} \frac{(t^2 - z^2)^{1/2} dt}{\exp(2\pi t) - 1}.$$

Теперь выполним суммирование по n . Применим формулу Абеля — Плана ко второму слагаемому в правой части (П.2) и к первому — меняя порядок интегрирования и суммирования. В итоге, используя обозначение I из (П.2), получим:

$$S = \int_0^{\infty} dx \left[\int_0^{\infty} dy (x^2 + y^2)^{1/2} - \frac{x}{2} + 2I(x) \right] - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dy y - I(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I(n). \quad (\text{П.3})$$

В результате регуляризации в (П.3) должны быть отброшены бесконечные интегралы, так что конечный вклад гег S дадут все члены (П.3), содержащие $I(x)$, $I(n)$, $I(0)$.

Отметим, что регуляризация суммы (П.1) по частотам в области (прямоугольнике) с границами требует отбрасывания вкладов неограниченных пространств

$$J_2 = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad J_1 = \int_0^{\infty} dx x \quad (\text{П.4})$$

как той же размерности, что и рассматриваемая область (J_2), так и нижней (J_1).

Отбрасывание J_1 можно трактовать как исключение некоторой бесконечной энергии, связанной с наличием границы у области (ср. раздел 3.4).

Аналогично регуляризуются и другие функции многих переменных.

Отметим, что суммы вида (П.1) могут быть выражены через дзета-функцию Эпштейна, определяемую для p -мерной суммы квадратов как⁹⁸

$$Z_p \left| \begin{matrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{matrix} \right| (s) \equiv \sum_{\mathbf{m}}' [(\mathbf{m} + \mathbf{g})^2]^{-ps/2} \exp(2\pi i(\mathbf{m}, \mathbf{h})). \quad (\text{П.5})$$

Здесь введены p -мерные векторы \mathbf{g} , \mathbf{h} , \mathbf{m} , причем вектор \mathbf{m} имеет целочисленные компоненты, $m_i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ и при суммировании опущен член с $\mathbf{m} + \mathbf{g} = 0$, если таковой имеется. В актуальном для нас случае $\mathbf{h} = 0$ справедливо функциональное уравнение⁹⁸

$$Z_p \left| \begin{matrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{matrix} \right| (s) \pi^{-ps/2} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) = Z_p \left| \begin{matrix} 0 \\ -\mathbf{g} \end{matrix} \right| (\sigma) \pi^{-p\sigma/2} \Gamma\left(\frac{p\sigma}{2}\right), \quad (\text{П.6})$$

где $\sigma = 1 - s$.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Суммы некоторых кратных сходящихся рядов типа (П.1) могут быть эффективно вычислены с помощью θ -функции Якоби^{99, 100}. В качестве примера рассмотрим, следуя¹⁰⁰, ряд

$$S(r) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty}' (m^2 + n^2)^{-r} \quad (\text{П.7})$$

при $r > 1$ (член с $m = n = 0$ в (П.7) опущен). Используя очевидное тождество (преобразование Меллина от $\exp(-bt)$)

$$\int_0^{\infty} t^{r-1} e^{-bt} dt = b^{-r} \Gamma(r),$$

преобразуем (П.7) к виду

$$S(r) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} t^{r-1} \sum_{m, n=-\infty}^{\infty}' \exp[-(m^2 + n^2)t] dt. \quad (\text{П.8})$$

Теперь, учтя определение

$$\theta_3(0, q) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2}$$

и полагая $q = \exp(-t)$, получим из (П.8)

$$S(r) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} t^{r-1} (\theta_3^2(0, e^{-t}) - 1) dt, \quad (\text{П.9})$$

где вычитаемое в квадратных скобках связано с отсутствием в (П.7) члена с $m = n = 0$. Известное представление ⁹⁸

$$\frac{1}{4} (\theta_3^2(0, q) - 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q^i}{1+q^{2i}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{i(2j+1)}$$

после подстановки в (П.9) и интегрирования приводит к

$$S(r) = 4\zeta(r)\beta(r), \quad \beta(r) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^r}, \quad (\text{П.10})$$

где $\zeta(r)$ — дзета-функция Римана.

Таким образом, двойной ряд (П.7) преобразован к произведению известных одномерных рядов.

Рассмотрим, например, скалярное поле на 2-торе $S^1 \times S^1$, т. е. на квадрате со стороной a с отождествлением противоположных сторон. Нерегуляризованная плотность энергии

$$\frac{\pi}{a^3} \sum'_{n, m=-\infty}^{\infty} (n^2 + m^2)^{1/2} = \frac{\pi}{a^3} Z_2 \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right| \left(-\frac{1}{2} \right), \quad (\text{П.11})$$

разумеется, расходится. Однако, используя (П.6) как определение регуляризованного значения суммы, можно выразить (П.11) через $Z_2(3/2)$ и затем с помощью (П.10) при $r = 3/2$:

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi a^3} Z_2 \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right| \left(\frac{3}{2} \right) = -\frac{\zeta(3/2)\beta(3/2)}{\pi a^3}. \quad (\text{П.12})$$

Учитывая, что $\zeta(3/2) = 2,612$, $\beta(3/2) = 0,8645$, получим $\varepsilon = -0,718/a^3$. То же численное значение можно получить фурье-преобразованием (П.11), причем регуляризация сводится к отбрасыванию слагаемого с нулевым импульсом ¹¹.

Плотность энергии в топологии $S^1 \times S^1 \times R^1$ также выражается через сумму (П.7) с $r = 2$ после размерной регуляризации интеграла по непрерывной переменной: это дает ¹⁰¹ $\varepsilon = -G/3a^4$, где $G = \beta(2) \approx 0,915$ — постоянная Каталана.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
метрологии им. Д. П. Менделеева, Ленинград

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Эффект Казимира предсказан в работах:

1. Casimir H. B. G. // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. 1948. V. 51. P. 793.
2. Casimir H. B. G. // Physica. 1953. V. 19. P. 846.

Экспериментальное обнаружение

3. Sparnaay M. Y. // Physica. 1958. V. 24. P. 751.
4. Derjaguin B. V., Abrikosova I. I., Lifshitz E. M. // Quart. Rev. 1968. V. 10. P. 295.
5. Tabor D., Winterton R. H. S. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1969. V. 312. P. 435.
6. Israelevili Y. N., Tabor D. // Ibidem. 1972. V. 331. P. 19.
7. Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М. Поверхностные силы. — М.: Наука, 1985.

Обзоры и монографии, содержащие разделы по эффекту Казимира

7. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепенко В. М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
8. Биррелл Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. — М.: Мир, 1984.

9. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.//Proc. of the Third Seminar on Quantum Gravity. — Singapore, The World Scientific, 1985. — P. 462.
 10. Plunien G., Müller B., Greiner W.//Phys. Rep. Ser. C. 1986. V. 134. P. 87.

Эффект Казимира в пространственных областях

11. Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.//ТМФ. 1979. Т. 38. С. 345.
 12. Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.//Изв. вузов. Сер. «Физика». 1979. № 7. С. 88.
 13. Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.//Ibidem. № 9. С. 51
 14. Isham C. Y.//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1978. V. 362. P. 383.
 15. De Witt B.//Phys. Rep. Ser. C. 1975. V. 19. P. 297.
 16. Deutsch D., Candelas P.//Phys. Rev. Ser. D. 1979. V. 20. P. 3063.
 17. Starobinsky A. A.//Proc. of the 1st Marcel Grossman Meeting. — Amsterdam: Elsevier, 1977. — P. 499.
 18. Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.//Изв. вузов. Сер. «Физика». 1980. № 7. С. 9.
 19. Старобинский А. А.//Классическая и квантовая теория гравитации. — Минск, 1976. — С. 110.
 20. Kennedy G., Critchley R., Dowker Y. S.//Ann. of Phys. 1980. V. 125. P. 346.
 21. Dowker Y. S., Kennedy G.//J. Phys. Ser. A. 1978. V. 11. P. 895.
 22. Bender C. M., Hauss P.//Phys. Rev. Ser. D. 1976. V. 14. P. 2622.
 23. Кау В. С.//Ibidem. 1979. V. 20. P. 3052.
 24. Заяев Ю. Б., Мостепаненко В. М.//Тезисы докладов Второго всесоюзного совещания «Квантовая метрология и фундаментальные физические константы». — Л.: ВНИИМ, 1985. — С. 177.

Эффект Казимира в случае сферических и цилиндрических границ области

- Boyer T. H.//Phys. Rev. 1968. V. 184. P. 1764.
 Davies B.//J. Math. Phys. 1972. V. 13. P. 1324.
 Schwinger Y., De Raad L. L., Milton K. A.//Ann. of Phys. 1978. V. 115. P. 1, 388.
 28. Olaussen K., Ravndal F.//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V. 192. P. 237.
 29. Balian R., Duplantier B.//Ann. of Phys. 1978. V. 112. P. 165.
 30. Lukosz W.//Zs. Phys. 1973. Bd 262. S. 327.
 31. De Raad L. L., Milton K. A.//Ann. of Phys. 1981. V. 136. P. 229.

Ван-дер-ваальсовы силы

32. Лифшиц Е. М.//ЖЭТФ. 1955. Т. 29. С. 94.
 33. Дзялошинский Н. Е., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.//УФН. 1961. Т. 73. С. 381.
 34. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
 35. Бараш Ю. С., Гинзбург В. Л.//УФН. 1975. Т. 116. С. 5; 1984. Т. 143. С. 345.
 36. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
 37. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1981.

Реальные среды и границы

38. Мостепаненко В. М., Трунов Н. Н.//ЯФ. 1985. Т. 42. С. 1297; Метрология. 1985. № 3. С. 17.
 39. Кац Е. И.//ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 212.
 40. Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.//Изв. вузов. Сер. «Физика». 1981. № 2. С. 78; ЯФ. 1982. Т. 35. С. 1049.
 41. Hargreaves C. M.//Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Ser. B. 1965. V. 68. P. 231.
 42. Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.//Изв. вузов. Сер. «Физика». 1983. № 5. С. 29.
 43. Candelas P.//Ann. of Phys. 1982. V. 143. P. 241.
 44. Brevik I., Kolbenstvedt H.//Phys. Rev. Ser. D. 1982. V. 25. P. 1731.

Эффект Казимира в космологии

45. Зельдович Я. Б.//УФН. 1968. Т. 95. С. 209.
 46. Линде А. Д.//УФН. 1984. Т. 144. С. 177.
 47. Грибб А. А., Мамаев С. Г.//ЯФ. 1969. Т. 10. С. 1276.
 48. Zeldovich Ya. B.//Magic Without Magic/Ed. J. A. Wheeler. — San Francisco: Freeman, 1972.
 49. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А.//ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 2161.
 50. Zeldovic Ya. B., Pitaevskii L. P.//Comm. Math. Phys. 1971. V. 23. P. 185.

51. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.//Phys. Lett. Ser. A. 1983. V. 93. P. 391.
52. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.//ЯФ. 1983. Т. 37. С. 1323.
53. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Шелюто В. А.//ТМФ. 1985. Т. 63. С. 64.
54. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Старобинский А. А.//ЖЭТФ. 1976. Т. 70. С. 1577.
55. Ford L. H.//Phys. Rev. Ser. D. 1975. V. 11. P. 3370; 1976. V. 14. P. 3304.
56. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А.//Письма Астрон. ж. 1984. Т. 10. С. 323.
57. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.//ЖЭТФ. 1980. Т. 78. С. 20.
58. Мостепаненко В. М.//ЯФ. 1980. Т. 31. С. 1690.
59. Starobinsky A. A.//Phys. Lett. Ser. B. 1980. V. 91. P. 99.
60. Зельдович Я. Б.//УФН. 1981. Т. 133. С. 481.
61. Hawking S. W.//Comm. Math. Phys. 1975. V. 43. P. 199.
62. Fulling S. A.//Phys. Rev. Ser. D. 1973. V. 7. P. 2850.
63. Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.//ЯФ. 1981. Т. 34. С. 1142; Изв. вузов. Сер. «Физика». 1982. № 4. С. 82.
64. Gopcharov Yu. P., Bytsenko A. A.//Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 271. P. 726; Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 182. P. 20; Class. and Quantum Gravity. 1987. V. 4. P. 555.

Модель мешков

65. Hasenfratz P., Kuti J.//Phys. Rep. Ser. C. 1978. V. 40. P. 75.
66. Johnson K.//Acta Phys. Polon. Ser. B. 1975. V. 6. P. 865.
67. Milton K. A.//Phys. Rev. Ser. D. 1980. V. 22. P. 1441, 1444.
68. Milton K. A.//Ann. of Phys. 1983. V. 150. P. 432.
69. Brevik I., Kolbenstvedt H.//Ibidem. 1982. V. 143. P. 179.
70. Baacke J., Igarashi Y.//Phys. Rev. Ser. D. 1983. V. 27. P. 460.

Суперсимметрия

71. Kaluza Th.//Sitzungber Preuss. Akad. Wiss. Math. und Phys. Kl. 1921. S. 966.
72. Klein O.//Zs. Phys. 1926. Bd 37. S. 895.
73. Appelquist T., Chodos A.//Phys. Rev. Ser. D. 1983. V. 28. P. 772.
74. Ходос А.//УФН. 1985. Т. 146. С. 647.
75. Арефьева И. Я., Волович И. В.//УФН. 1985. Т. 146. С. 655.
76. Candelas P., Weinberg S.//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 237. P. 397.
77. Воронцов Н. А., Коган Я. И.//Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 262.
78. Кузьмин В. А., Ткачев И. П., Шапошников М. Е.//Ibidem. 1982. Т. 36. С. 49.
79. Ансельм А. А., Уральцев Н. Г., Хозе В. А.//УФН. 1985. Т. 145. С. 185.
80. Igarashi Yu.//Phys. Rev. Ser. D. 1984. V. 30. P. 1812.
81. Radescu E. E.//Ibidem. 1983. V. 27. P. 1409.
82. а) Moody J. E., Wilczek F.//Ibidem. 1984. V. 30. P. 130.
б) Koikawa T., Yoshimura M.//Phys. Lett. Ser. B. 1985. V. 155. P. 137.
Okada Y., Yoshimura M.//Phys. Rev. Ser. D. 1986. V. 33. P. 2164.
в) Мостепаненко В. М., Соколов И. Ю.//Phys. Lett. Ser. A. 1987. V. 125. P. 405; ЯФ. 1987. Т. 46. С. 1174.

Монографии и статьи по общим вопросам

83. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. — М.: Наука, 1980.
84. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
85. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
86. Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. — М.: Наука, 1978.
87. Введение в супергравитацию/Под ред. С. Феррары, Дж. Тейлора. — М.: Мир, 1985.
88. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1973.
89. Шутц Б. Геометрические методы в математической физике. — М.: Мир, 1984.
90. Callan C. G., Coleman S., Jackiw R.//Ann. of Phys. 1970. V. 59. P. 42.
91. McKean H. P., Singer I. M.//J. Diff. Geom. 1967. V. 1. P. 43.
92. Икшинов А. И., Риптус В. П.//Тр. ФИАН СССР. 1979. Т. 111.
93. Евграфов М. А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1968.
94. Chernikov N. A., Tagirov E. A.//Ann. Inst. H. Poincaré. Ser. A. 1968. Т. 9. P. 109.
95. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Строение и эволюция Вселенной. — М.: Наука, 1975.
96. Feynman R. P.//Acta Phys. Polon. 1963. V. 24. P. 697.

97. Гинзбург В. Л., Киржиц Д. А., Любушин А. А. // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 451.
98. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. — М.: Наука, 1973.
99. Glasser M. L. // J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 409.
100. Zucker I. J. // Ibidem. 1974. V. 15. P. 187.
101. Dowker J. S., Critchley R. // J. Phys. Ser. A. 1976. V. 9. P. 535.
102. Васильев С. П., Леонов В. Б., Моисеев Ю. Н., Панов В. И. // Письма ЖТФ. 1988. Т. 14. С. 727.
103. Мостепаненко В. М., Соколов Н. Ю. // ДАН СССР. 1988. Т. 298. С. 1380.
104. Заяев Ю. Б., Казаков А. Я., Мостепаненко В. М., Трунов Н. Н. // Изв. вузов СССР. Сер. «Физика». 1988. № 7. С. 68.