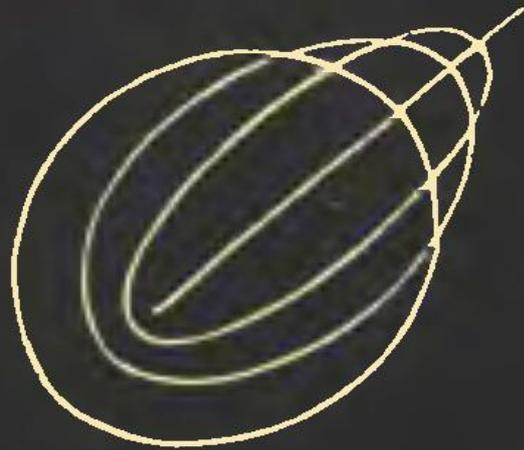
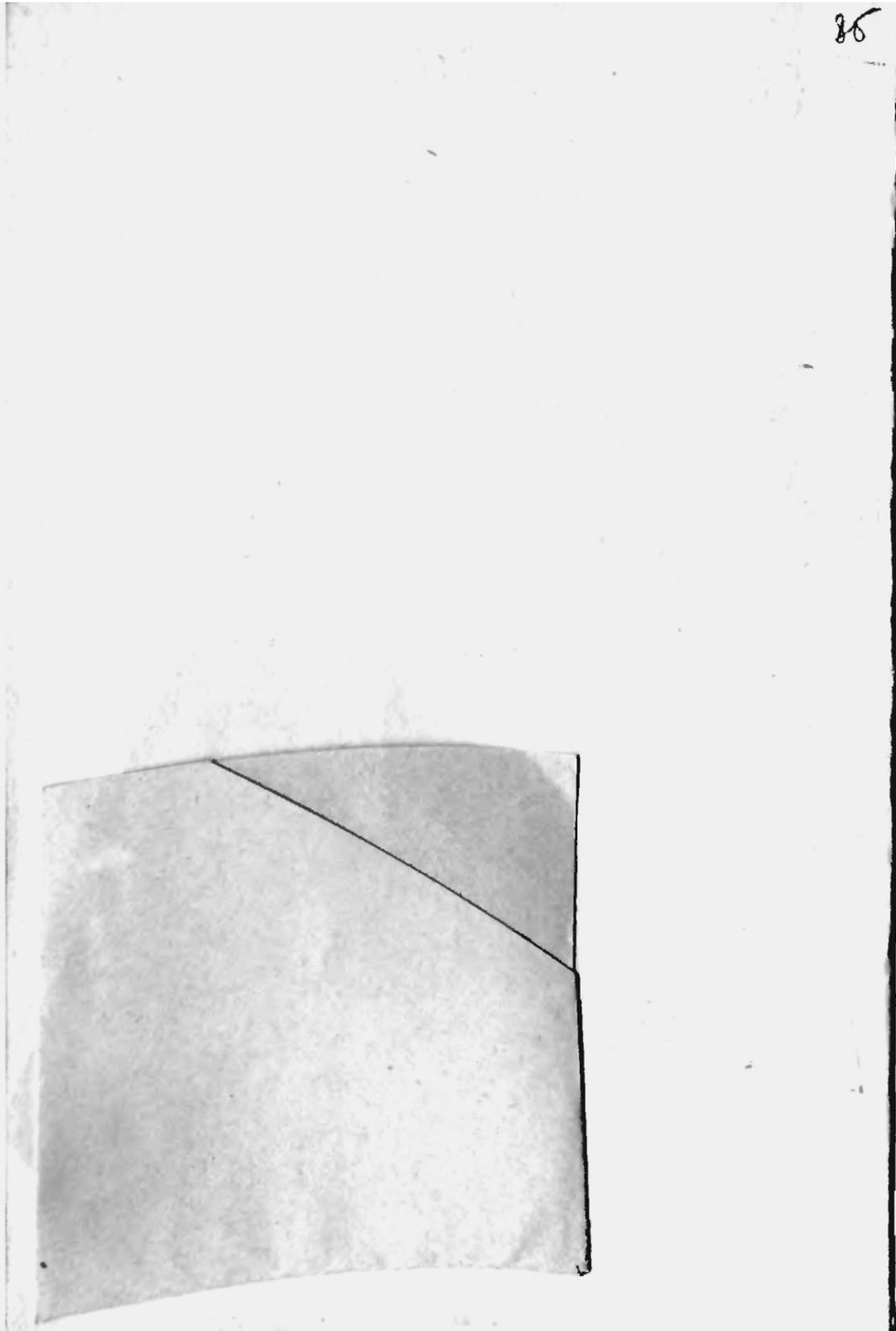


БНРОДИМОВ

53
P60



**АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ
КВАНТОВАЯ
МЕХАНИКА**



Б. Н. РОДИМОВ

**АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ
КВАНТОВАЯ
МЕХАНИКА**



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1967

Книга посвящена изложению основ автоколебательной квантовой механики. Автор показывает, что из основных положений специальной теории относительности вытекает необходимость существования двух квантовых механик: одной из них является обычная квантовая механика, другой — новая детерминистическая автоколебательная квантовая механика. В силу своих особенностей автоколебательная квантовая механика дает возможность решать такие задачи, которые по обычной квантовой механике принципиально не могут быть решены: например, задачу о движении электрона в атоме и т. п. В книге приводятся примеры проблем, в которых автоколебательная квантовая механика дает существенно новые результаты.

Автоколебательная квантовая механика может рассматриваться как промежуточная ступень между классической физикой и обычной квантовой механикой.

Книга рассчитана на лиц, знакомых с основами специальной теории относительности и обычной квантовой механики.

ИСПРАВЛЕНИЯ И ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ			
Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
17	13 сверху	$mt_0 \neq 0$	$m_0 \neq 0$
73	.	I в формулах 256	J
117—118	.	I_1	J_1
141	4 снизу	микроскопического	макроскопического
162	8 и 9 сверху	\cos	\cos
167	20—22 сверху	\sin	\sin
168	18 сверху	u -уравнения микрообъектов	v -уравнения макрообъектов

Глава I

СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СВОЙСТВ ОБЫЧНОГО И СОПРЯЖЕННОГО МИРОВ

§ 1. Две скорости материальных частиц.

В качестве исходного момента для построения теории, основные положения которой были изложены в [1,2,3], можно взять следующий факт, вытекающий из основных положений специальной теории относительности.

Согласно принципу наименьшего действия для свободно движущейся релятивистской частицы вариация действия [4]

$$\delta S = - m_0 c \delta \int_a^b ds = 0, \quad (1)$$

здесь m_0 —масса покоя частицы, $ds = \sqrt{-dx_i^2}$ - элемент интервала. Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta S &= - m_0 c \delta \int_a^b \sqrt{-dx_i^2} = - m_0 c \int_a^b \delta \sqrt{-dx_i^2} = \\ &= m_0 c \int_a^b \frac{dx_i \delta dx_i}{\sqrt{-dx_i^2}} = m_0 \int_a^b u_i d \delta x_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где u_i - четырехмерная скорость частицы:

$$u_i = \frac{cdx_i}{\sqrt{-dx_i^2}} = \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c \frac{dx_i}{ds} \quad (3)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \delta S &= m_0 \int_a^b u_i d \delta x_i = m_0 u_i \delta x_i \Big|_a^b - m_0 \int_a^b \delta x_i du_i = \\ &= m_0 u_i \delta x_i \Big|_a^b - \frac{m_0}{c} \int_a^b \delta x_i \omega_i ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где ω_i - четырехмерное ускорение частицы

$$\omega_i = \frac{du_i}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c \frac{du_i}{ds}. \quad (5)$$

Для того, чтобы найти уравнения движения частицы, сравнивают различные траектории, проходящие через две заданные точки (a,b). Истинная траектория определится тогда из условия $\delta S=0$. В данном случае мы получили бы $\omega_i=0$, т. е. постоянство скорости свободной частицы в четырехмерном виде.

Для того, чтобы найти вариацию действия как функцию от координат, надо считать заданной точку a , так что $(\delta x_i)_a=0$, вторую же точку b нужно считать переменной, но при этом рассматривать только истинные траектории, для которых $\omega_i=0$. В этом случае

$$\delta S = m_0 u_i \delta x_i = \sum_a^3 \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v_a \delta x_a - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \delta t. \quad (6)$$

Эту вариацию для действительного релятивистского движения также нужно приравнять нулю (чего Ландау и Лифшиц не делают), и это дает соотношение, на которое, по всей видимости, никто не обращает внимания

$$u_i \delta x_i = 0, \quad (7)$$

или в подробной записи

$$\sum_a^3 \frac{dx_a}{dt} \cdot \delta x_a = c^2 \delta t, \quad (8)$$

то есть

$$\sum_a^3 \frac{dx_a}{dt} \cdot \frac{\delta x_a}{\delta t} = \sum_a^3 v_a u_a = \mathbf{v} \mathbf{u} = c^2. \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = \frac{c^2}{v^2} \mathbf{v}.$$

С другой стороны, так как

$$\delta S = \sum_a^3 \frac{\partial S}{\partial x_a} \delta x_a + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t, \quad (10)$$

то по условию $\delta S=0$ получим уравнение

$$\sum_a^3 \frac{\partial S}{\partial x_a} \delta x_a + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t = 0. \quad (11)$$

Используя соотношение (9), будем иметь

$$\frac{c^4}{v^2} (\text{grad } S)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2. \quad (12)$$

Уравнение Гамильтона—Якоби в релятивистской механике

$$\sum_{\alpha}^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - m_0^2 c^2 \quad (13)$$

и уравнение (12) дают обычные соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -E, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_x, \quad (14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = p_z.$$

Таким образом, равенство $\delta S=0$ не ведет к противоречию.

Равенство $\delta S=0$ позволяет также написать

$$p_x \delta x + p_y \delta y + p_z \delta z = E \delta t. \quad (15)$$

Используя равенство (9), получим

$$p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z = E \quad (16)$$

или

$$p u = E = m \vartheta u = m c^2$$

$$p u \vartheta = E \vartheta \quad (17)$$

$$p = \frac{E \vartheta}{c^2}.$$

Эту формулу обычно получают из выражений

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

не обращая внимания на связь $v u = c^2$.

Для нерелятивистского случая вариация действия, как функция переменного верхнего предела, не будет равна нулю, так там нет такой связи между пространственными координатами и временем, которая имеет место в релятивистском случае.

Соотношение $v u = c^2$ можно получить и другим путем, более непосредственно показывающим релятивистскую суть дела. Рассмотрим переход от одной системы координат к другой, которая движется относительно первой с очень малой постоянной скоростью. В этом случае преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

можно заменить формулами

$$x' = x + \delta x, \quad t' = t + \delta t.$$

Составляя выражения для интервала в обеих системах, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \approx x^2 + y^2 + z^2 + 2(x\delta x + y\delta y + z\delta z) - c^2(t^2 + 2t\delta t).$$

Должно быть

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = c^2 t\delta t.$$

Тогда

$$\frac{x}{t} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{y}{t} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{z}{t} \frac{\delta z}{\delta t} = c^2. \quad (18)$$

И снова

$$vu = c^2$$

$$\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} = v_x$$

(для равномерного движения, очевидно, $\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} = v_x$ и т. д.).

Наконец, соотношение $vu = c^2$ может быть получено, если проварьировать выражение для интервала события $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = inv$ при фиксированном значении величины этого интервала. Получаем:

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z - c^2 t\delta t = 0,$$

$$\frac{x}{t} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{y}{t} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{z}{t} \frac{\delta z}{\delta t} = c^2,$$

$$vu = c^2.$$

Поскольку $\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} = v \pm \frac{\delta x}{\delta t} = u$, и $u > c$. Таким образом, без всякого отношения к волновым

представлениям мы получаем, что с каждой частицей связаны две скорости, одна из которых больше скорости света. Поскольку здесь нет пока речи о каких-либо волнах, то не имеет смысла говорить о фазовой и групповой скоростях. Скорости u и v нужно рассматривать как физически совершенно равноправные, т. е. обе скорости являются неотъемлемыми характеристиками любой материальной точки, и это позволяет по-новому взглянуть на некоторые давно известные положения.

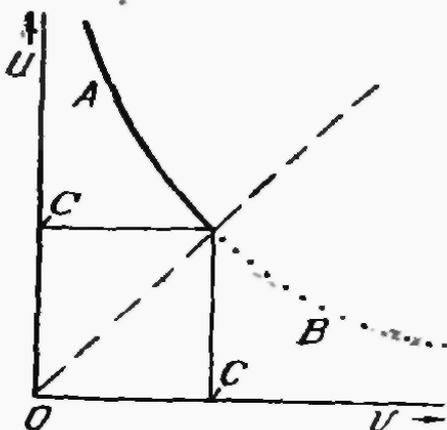


Рис. 1

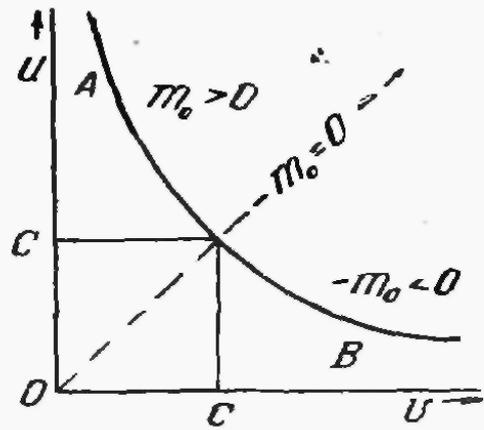


Рис. 2

На диаграмме, связывающей "групповую" и "фазовую" скорости (рис. 1),

рассматривают обычно только участок A на котором $v < c$ и $u > c$. Участок B , где $v > c$ и $u < c$, из рассмотрения исключается и считается, что в природе нет объектов, которым он мог бы соответствовать. Однако факт существования античастиц подсказывает мысль, что может быть участок B и соответствует античастицам. Это особенно делается похожим на правду, если у каждого участка указать значение масс покоя соответствующих частиц. Тогда диаграмма будет выглядеть более симметрично и без "запретных" областей: вся кривая $vu = c^2$ "работает" (рис. 2). И это ведет к далеко ведущим последствиям. Прежде всего, придется пересмотреть соотношения теории относительности, которые рассматривают по традиции "половину" мира, соответствующую значениям скоростей $v < c$, $u > c$.

Прежде чем перейти к этим вопросам, рассмотрим еще одно соотношение из самых начальных, которые рассматриваются при изложении теории относительности, свидетельствующее в пользу нашего предположения.

Если рассматривать в качестве переменных x и ct , можно построить следующую диаграмму (рис. 3). Беря для обычного мира значение интервала $s^2 > 0$ (вещественный, времениподобный интервал) и деля на это выражение значение интервала

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2$$

получим уравнение гипербол, обозначенных на рисунке буквой A .

$$\frac{c^2 t^2}{s^2} - \frac{x^2}{s^2} = 1. \quad (19)$$

Для мира, где $s^2 < 0$ (мнимые, пространственноподобные интервалы) будем иметь соответственно интервал

$$-s^2 = c^2 t^2 - x^2$$

и уравнение гипербол

$$\frac{x^2}{s^2} - \frac{c^2 t^2}{s^2} = 1. \quad (20)$$

Эти гиперболы (B) являются сопряженными гиперболами по отношению к гиперболам A . Для угловых коэффициентов сопряженных диаметров имеем

$$kk^* = 1$$

В нашем случае (рис. 3)

$$k_1 = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c}, \quad k^* = \frac{x^*}{ct^*} = \frac{u}{c}, \quad uv = c^2.$$

Мировая линия обычного мира всегда связана с сопряженной линией

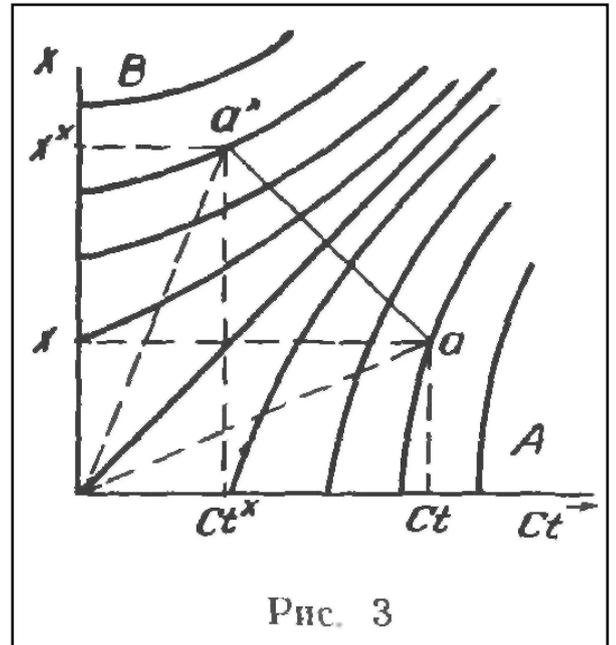


Рис. 3

антимира. Каждому событию в мире соответствует сопряженное событие в антимире (рис. 3). Вообще следовало бы вместо "антимира" ввести название "сопряженного мира", это больше будет соответствовать сути дела, которая заключается в том, что природа имеет двойственность, пронизывающую ее до самых глубоких основ.

В связи с этим толкование диаграммы (рис. 4) также должно измениться. События вне светового конуса, определяемого уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0,$$

будут относиться к сопряженному миру, т. е. к античастицам, и для них также части мировых линий до точки $x = 0, t = 0$ будут абсолютно прошедшим, после точки $x = 0, t = 0$ - абсолютно будущим (рис. 5).

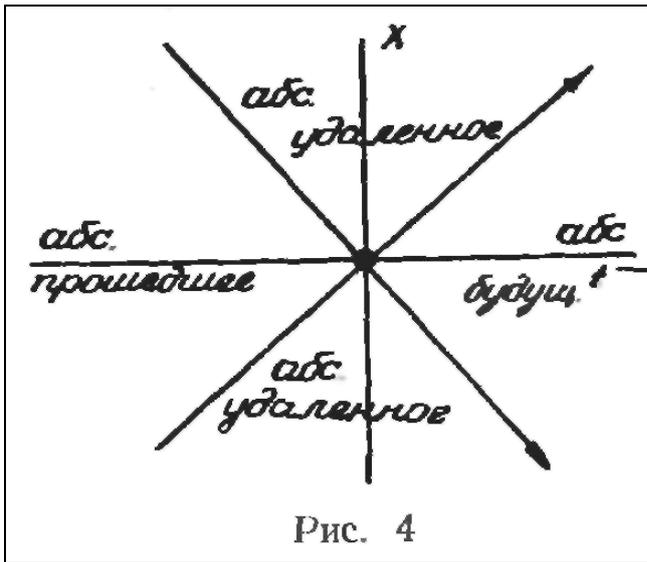


Рис. 4

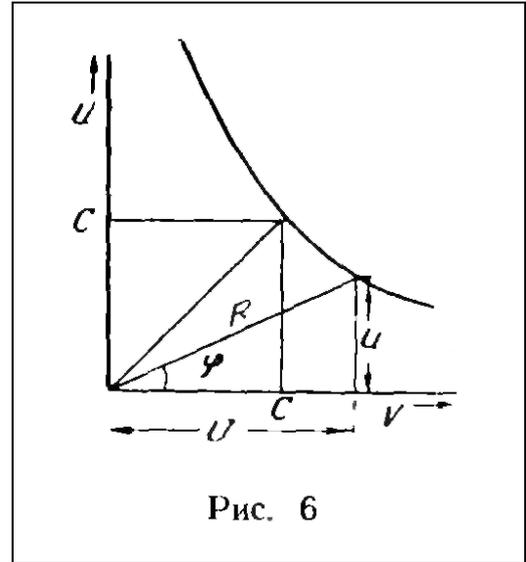


Рис. 6

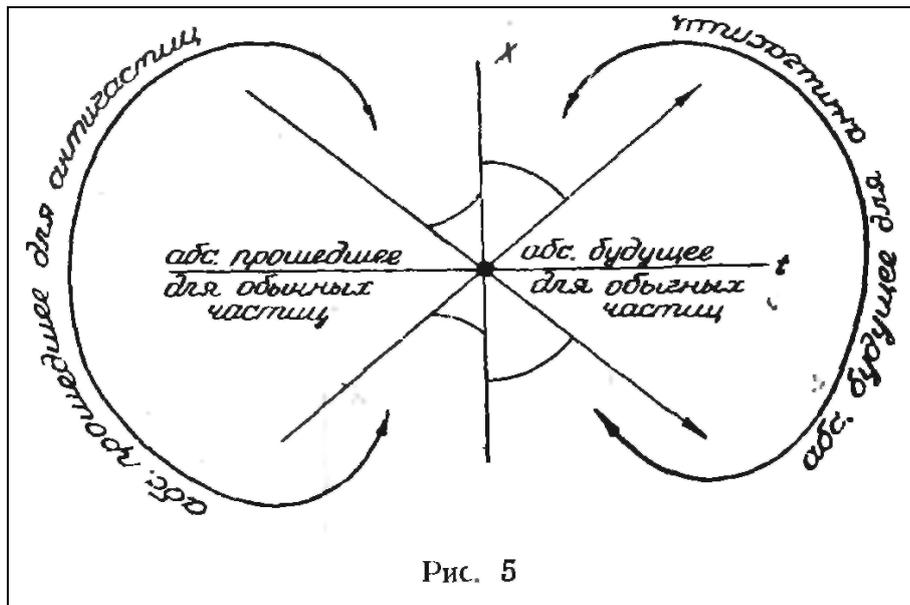


Рис. 5

Чтобы еще раз подчеркнуть двойственность материального мира, перечертим диаграмму рис. 2. Для этого выразим обе скорости как функции угла φ (рис. 6).

$$v = R \cos \varphi, u = R \sin \varphi$$

Так как $vu = c^2$, то $R = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$ и

$$v = \frac{\sqrt{2}c \cos \varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}, \quad u = \frac{\sqrt{2}c \sin \varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

Перемещаясь вдоль какой-либо из скоростей (v или u), мы можем перейти формально из обычного мира в сопряженный или наоборот. Однако и оставаясь в пределах одного мира, мы всегда будем иметь дело с двумя скоростями, одна из которых $> c$, а другая $< c$.

Далее мы разберем основные положения специальной теории относительности в приложении к сопряженному миру. Причем, хотя мы предполагаем, что читатель знаком с теорией относительности, мы для ясности будем изложение вести параллельно, сопоставляя формулы для обычного мира и для мира сопряженного.

§ 2. Преобразования Лоренца.

Обычные преобразования Лоренца представляют собой формулы, по которым, зная координаты x, y, z, t события в некоторой системе отсчета K , можно найти координаты x', y', z', t' того же события в другой инерциальной системе отсчета K' , причем скорости этих систем друг относительно друга не могут превышать скорости света c . Мы рассмотрим преобразования Лоренца за пределами этого ограничения, т. е. будем считать, что V может быть больше c . Конечно, никаким реальным изменением скорости мы в область антимира не попадем. Однако, если эта область соответствует вполне реальным античастицам, то, переходя к $v > c$, мы одновременно переходим в область, где $u < c$, и вполне возможно, что формальное распространение преобразований Лоренца на эту область даст вполне реальные физические характеристики как античастиц, так и обычных частиц (ибо и для обычных частиц одна из скоростей u больше $c!$).

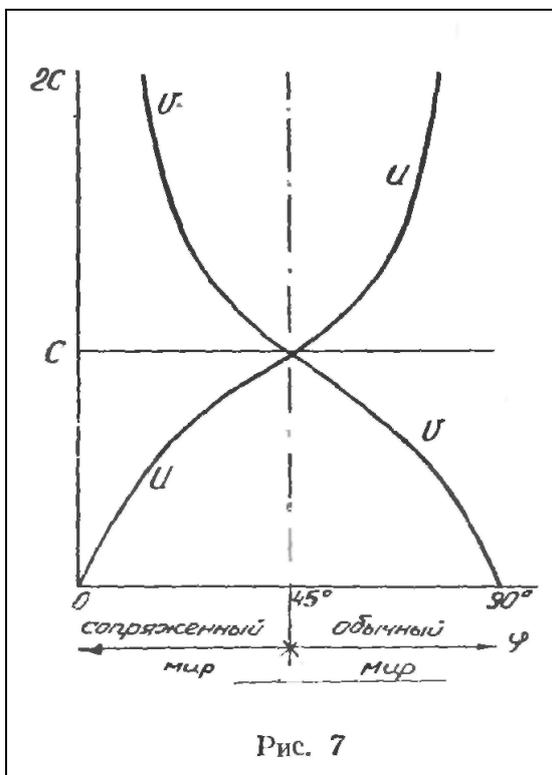


Рис. 7

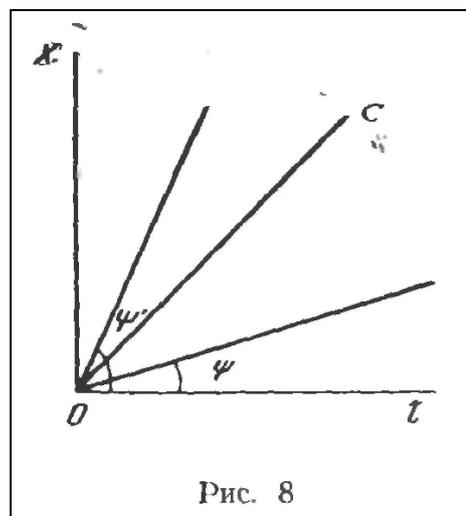


Рис. 8

Мы сопоставим вывод формул преобразований Лоренца для обычного мира и сопряженного мира, помещая формулы для обычного мира слева, для сопряженного мира — справа. Общие выражения будем помещать посередине страницы. Как обычно, преобразование от системы K к новой системе K' рассматриваем как поворот системы координат в четырехмерном пространстве в плоскости x, τ ($\tau = ict$), координаты y, z при этом не меняются. Для обычного преобразования Лоренца угол поворота ψ лежит в пределах угла COt , для сопряженного преобразования Лоренца - в пределах угла XOC (рис. 8).

Связь старых и новых координат в обоих случаях дается формулами:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \psi - \tau \cdot \sin \psi \\ \tau &= x' \sin \psi + \tau' \cos \psi. \end{aligned} \quad (21)$$

При $x' = 0$

$$x = -\tau' \sin \psi; \quad \tau = \tau' \cos \psi; \quad \frac{x}{\tau} = -\operatorname{tg} \psi.$$

Если x/t есть скорость V системы K' относительно системы K , то

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{x}{ict} = i \frac{x}{ct} = i \frac{V}{c}. \quad (22)$$

Дальше начинается различие:

$$\begin{array}{c}
 V < c \\
 \sin \psi = \frac{i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\
 \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 V > c \\
 \sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}} \\
 \cos \psi = -\frac{i \frac{c}{V}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}}
 \end{array}
 \right.
 \quad (23)$$

Отсюда формулы преобразования координат:

$$\begin{array}{c}
 x' - i\tau' \frac{V}{c} \\
 x = \frac{\quad}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\
 ix' \frac{V}{c} + \tau' \\
 \tau = \frac{\quad}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 ix' \frac{c}{V} + \tau' \\
 x = -\frac{\quad}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}} \\
 x' - i\tau' \frac{c}{V} \\
 \tau = \frac{\quad}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}}
 \end{array}
 \right.
 \quad (24)$$

Или, так как $\tau = ict$

$$\begin{array}{c}
 x' + Vt' \\
 x = \frac{\quad}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\
 t' + \frac{V}{c^2} x' \\
 t = \frac{\quad}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 \frac{x'}{V} + t' \\
 x = -ic \frac{\quad}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}} \\
 x' + \frac{c^2}{V} t' \\
 t = -\frac{i}{c} \frac{\quad}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}}
 \end{array}
 \right.
 \quad (25)$$

Преобразования Лоренца образуют группу Лоренца, удовлетворяющую равенству

$$Q^*IQ = I \quad (26)$$

Здесь Q - матрица

$$Q = \left(\begin{array}{cccc}
 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}
 \end{array} \right) = (q_{ik}), \quad \beta = \frac{V}{c} < 1 \quad (27)$$

Q^* получается из Q транспонированием элементов $q_{ki}^* = q_{ik}$, I - единичная матрица

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} = I. \quad (28)$$

Сопряженные преобразования Лоренца образуют особую группу, для которой также справедливо равенство

$$Q^*IQ = I \quad (29)$$

Здесь Q - матрица

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{i\beta'^2}{\sqrt{1-\beta'^2}} & 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{1-\beta'^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{1-\beta'^2}} & 0 & 0 & -\frac{i\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}} \end{pmatrix} = (q_{ik}), \quad \beta' = \frac{c}{V} < 1 \quad (30)$$

Q^* - транспонированная матрица, $q_{ki}^* = q_{ik}$, I - единичная матрица

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I. \quad (31)$$

То обстоятельство, что получается две группы, еще раз подчеркивает, что переход из обычного мира в мир сопряженный есть процесс превращения частиц через фотонную стадию; то есть процесс сугубо физический.

§ 3. Преобразование скоростей.

Пусть $v_x = \frac{dx}{dt}$ есть компонента скорости некоторой частицы в системе K ; $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ - скорость этой же частицы в системе K' .

Перепишем преобразования Лоренца для дифференциалов координат и времени:

$$\left. \begin{array}{l} V < c \\ dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{array} \right| \begin{array}{l} V > c \\ dx = -ic \frac{\frac{dx'}{V} + dt'}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}}, \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = -\frac{i}{c} \frac{dx' + \frac{c^2}{V}dt'}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}} \end{array} \quad (32)$$

Деля первые три равенства на

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy'}{dt'} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dz'}{dt'} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

Или

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}$$

четвертое, найдем

$$\frac{dx}{dt} = c^2 \frac{\frac{1}{V} \frac{dx'}{dt'} + 1}{\frac{dx'}{dt'} + \frac{c^2}{V}}$$

$$\frac{dy}{dt} = ic \frac{\frac{dy'}{dt'} \sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}}{\frac{dx'}{dt'} + \frac{c^2}{V}}$$

$$\frac{dz}{dt} = ic \frac{\frac{dz'}{dt'} \sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}}{\frac{dx'}{dt'} + \frac{c^2}{V}}$$

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}$$

$$v_y = i \frac{V}{c} \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}$$

$$v_z = i \frac{V}{c} \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}$$

Таким образом, даже для наблюдателя из обычного мира скорость частицы из сопряженного мира, направленная параллельно скорости относительно движения, будет реальной, т. е. доступной наблюдению!

Различные случаи сложения скоростей представлены на рис. 9. (Какую роль играют скорости $> c$, мы будем рассматривать дальше, здесь же нужно помнить, что с каждой такой скоростью связана вторая скорость, меньшая, чем скорость света).

Закон сложения скоростей можно написать как для скорости v , так и для скорости u

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}, \quad u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}. \quad (35)$$

V в обеих формулах одно и то же и может быть $> c$ или $< c$. Если в K' системе $u'v' = c^2$, то в K системе

$$uv = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \cdot \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}} = \frac{c^2 + V^2 + (v' + u')V}{1 + \frac{V^2}{c^2} + (u' + v') \frac{V}{c^2}} = c^2. \quad (36)$$

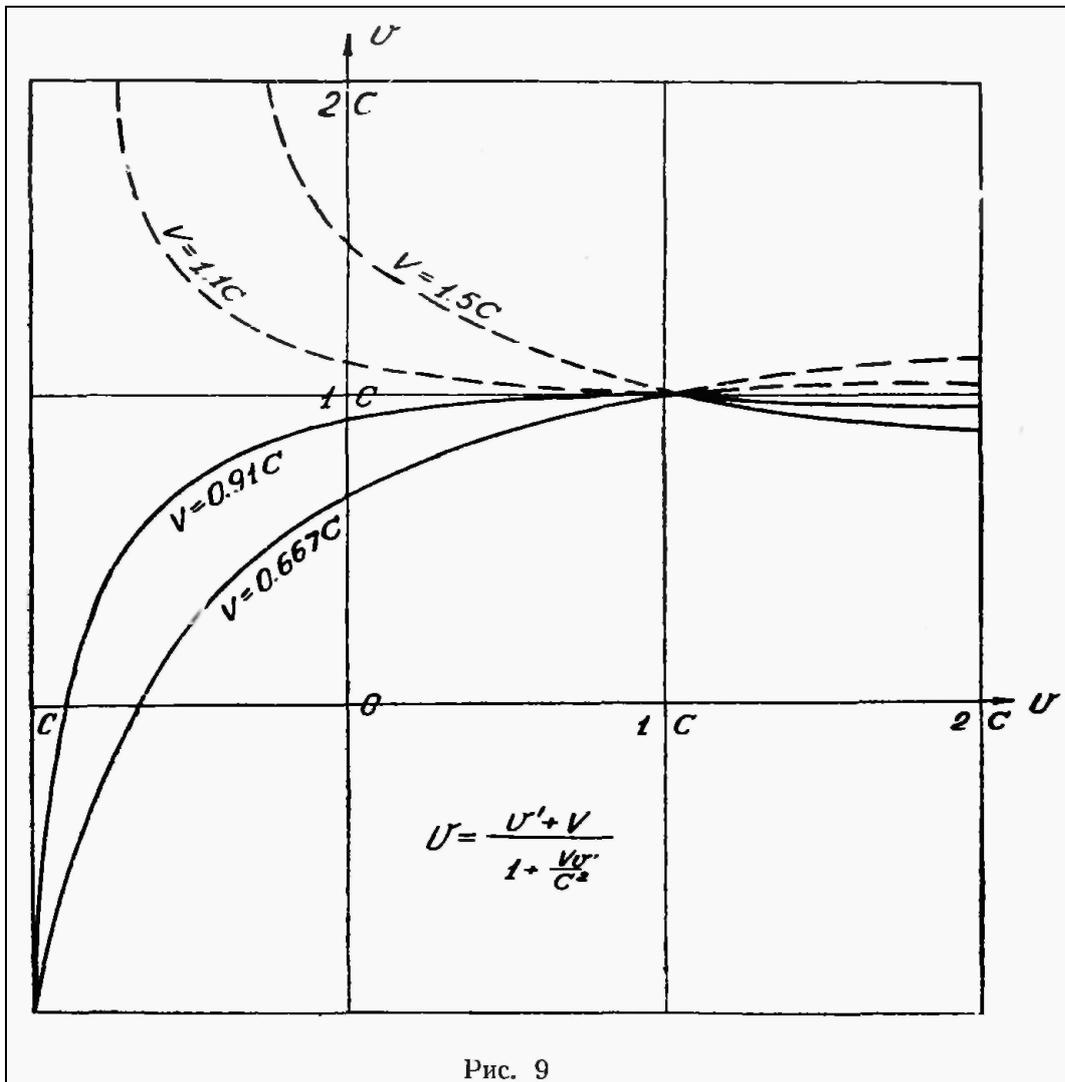


Рис. 9

Поскольку свойства обычного мира и сопряженного мира связаны, то, подвергая одну величину преобразованию Лоренца, мы тем самым подвергаем сопряженную с ней величину сопряженному преобразованию Лоренца. Возьмем, например, преобразование скорости

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}}, \quad v^* = \frac{v'' + V^*}{1 + \frac{v''V^*}{c^2}} \quad (37)$$

$$V < c \quad V^* > c.$$

Для сопряженных систем $VV^* = c^2$. Если скорости частиц относительно сопряженных систем равны между собой, $v' = v''$, то относительно системы K скорости будут связаны соотношением

$$vv^* = \frac{c^2v' + Vc^2}{c^2 + Vv'} \cdot \frac{c^2v' + c^2V^*}{c^2 + v'V^*} = c^2. \quad (38)$$

§ 4. Замечания к закону сложения скоростей.

Как показано в предыдущем параграфе, закон сложения скоростей вдоль линии относительно движения одинаков и для обычного и для сопряженного

миров. Поскольку фотоны лежат как раз на границе между этими мирами, то этот закон будет иметь место и для фотонов. Некоторые авторы считают, что фотон не может рассматриваться как система отсчета, так как фотон не может догнать фотон. Для электронов больших энергий, скорость которых чрезвычайно близка к скорости света, такого ограничения не выдвигают, хотя практически мы никакой связи с такой системой, как данный электрон, установить также не можем (кроме, конечно, однократного столкновения).

Если относительно одной системы K' фотон движется со скоростью $v' = c$, то относительно системы K он будет двигаться также со скоростью $v = c$ (основной постулат теории относительности):

$$v = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c}} = c \quad (39)$$

(направление $v' = c$ совпадает с V) и

$$v = \frac{-c + V}{1 - \frac{V}{c}} = -c \quad (40)$$

(направление $v' = c$ противоположно скорости V).

Если системой K является фотон и $V = c$ (математически такой случай вполне допустим, так как никаких ограничений, даваемых обычно

множителем $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, здесь нет), то из формулы сложения скоростей получается интересный результат. Оказывается, что фотоны, которые движутся со скоростями c относительно любой системы отсчета, состоящей из материальных частиц с нулевыми массами, отличными от нуля,(???) относительно друг друга могут двигаться с любыми скоростями! Фотоны - эти самые релятивистские частицы - не признают теорию относительности в своих отношениях друг с другом. Действительно, если $V = c$, то при любых значениях v'

$$v = \frac{v' + c}{1 + \frac{v'}{c}} = c. \quad (41)$$

Нужно заметить, что скорость v' здесь может быть только скоростью фотона, а не какой-либо частицы с $m_0 \neq 0$. В противном случае получилось бы, что такая частица может двигаться относительно нас со скоростью света.

§ 5. Четырехмерный вектор скорости.

Компоненты четырехмерного вектора преобразуются как компоненты радиуса-вектора события:

$$\begin{array}{l|l}
 A_x = \frac{A'_x - i \frac{V}{c} A'_\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & A_x = - \frac{i \frac{c}{V} A'_x + A'_\tau}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}} \\
 A_y = A'_y & A_y = A'_y \\
 A_z = A'_z & A_z = A'_z \\
 A_\tau = \frac{A'_\tau + i \frac{V}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & A_\tau = \frac{A'_x - i \frac{c}{V} A'_\tau}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}}
 \end{array} \quad (42)$$

Четырехмерной скоростью частицы называется вектор с компонентами вида

$$v_{\mu\kappa} = c \frac{dx_\kappa}{ds} \quad \Bigg| \quad v_{\mu\kappa} = ic \frac{dx_\kappa}{ds} \quad (43)$$

Действительно, мы можем рассматривать интервал

$$ids \quad \Big| \quad \hat{ds} \quad (44)$$

как четырехмерный вектор с компонентами

$$dx, dy, dz, d\tau \quad \Big| \quad dx, dy, dz, d\tau.$$

Косинусы углов между вектором интервала и соответствующими компонентами будут

$$\begin{array}{l|l}
 \alpha_x = \frac{dx}{ids}; \quad \alpha_z = \frac{dz}{ids} & \alpha_x = \frac{dx}{ds}, \quad \alpha_z = \frac{dz}{ds}, \\
 \Sigma \alpha_\kappa^2 = 1 & \Sigma \alpha_\kappa^2 = 1. \\
 \alpha_y = \frac{dy}{ids}; \quad \alpha_\tau = \frac{d\tau}{ids} & \alpha_y = \frac{dy}{ds}, \quad \alpha_\tau = \frac{d\tau}{ds}.
 \end{array} \quad (45)$$

Так как из выражения для интервала получается

$$\begin{array}{l|l}
 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - v^2, & \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 - c^2, \\
 \frac{dt}{ds} = \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}},
 \end{array} \quad (46)$$

то косинусы примут вид

$$\begin{array}{l}
 a_x = \frac{dx}{ids} = \frac{dx}{idt} \cdot \frac{dt}{ds} = -i \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \left| \quad x_x = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{v_x}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right. \\
 a_y = \quad \quad \quad = -i \frac{v_y}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \left| \quad a_y = \quad \quad \quad = \frac{v_y}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right. \\
 a_z = \quad \quad \quad = -i \frac{v_z}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \left| \quad a_z = \quad \quad \quad = \frac{v_z}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right. \\
 a_\tau = \frac{d\tau}{ids} = \frac{icdt}{ids} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \left| \quad a_\tau = \frac{d\tau}{ds} = \frac{icdt}{ds} = i \frac{c}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right.
 \end{array} \quad (47)$$

Если скорость частицы (четырёхмерная) направлена вдоль оси τ , то имеем только одно соотношение

$$\hat{ids} = \hat{d\tau} = \hat{ic} dt \quad \left| \quad \hat{ds} = \hat{d\tau} = \hat{ic} dt, \quad (48)$$

деля на dt , получим величину четырёхмерного вектора скорости \hat{V}

$$\frac{\hat{ids}}{dt} = \hat{ic} = \hat{V} \quad \left| \quad \frac{\hat{ds}}{dt} = \hat{ic} = \hat{V}. \quad (49)$$

Когда вектор

$$\hat{ids} \quad \left| \quad \hat{ds}$$

несовпадает с осью τ , скорость \hat{ic} имеет компоненты

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{ic\alpha}_x, \mathbf{ic\alpha}_y, \mathbf{ic\alpha}_z, \mathbf{ic\alpha}_\tau \\
 v_{Mx} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v_{M\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \left| \quad v_{Mx} = \frac{icv_x}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}, \quad v_{M\tau} = \frac{c^2}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right. \\
 v_{My} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v_{Ml} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \left| \quad v_{My} = \frac{icv_y}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}, \quad v_{Ml} = \frac{ic^2}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right. \\
 v_{Mz} = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \quad \quad \quad \left| \quad v_{Mz} = \frac{icv_z}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}, \quad \quad \quad \quad \right.
 \end{array} \quad (50)$$

Таким образом, компоненты скорости имеют вид, указанный в начале параграфа.

§ 6. Четырехмерный вектор количества движения.

Этот вектор получается умножением скорости частицы на ее массу покоя (для обычных частиц на m_0 , для античастиц - на $-m_0$):

$$\begin{array}{l}
 \hat{M} = m_0 \hat{ic} \\
 p_{mx} = m_0 \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_{mt} = m_0 \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 p_{my} = m_0 \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_{mx} = -im_0 \frac{cv_x}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}, \\
 p_{mz} = m_0 \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_{my} = -im_0 \frac{cv_y}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}, \\
 p_{m\tau} = im_0 \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_{mt} = -im_0 \frac{c^2}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}
 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l}
 \hat{M} = -m_0 \hat{ic} \\
 p_{mz} = -im_0 \frac{cv_z}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}, \\
 p_{mx} = m_0 \frac{c^2}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}, \\
 p_{my} = -im_0 \frac{c^2}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}
 \end{array} \quad (51)$$

За массу частицы принимаем величину

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{u^2}}} \quad \left| \quad m = -\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} = -\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$v < c, u > c \quad \left| \quad v > c, u < c.$$

(52)

Тогда для компонент импульса получаются выражения:

$$\begin{array}{l}
 p_{mx} = mv_x, \\
 p_{my} = mv_y, \\
 p_{mz} = mv_z, \\
 p_{m\tau} = imc, \\
 p_{mt} = mc,
 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l}
 p_{mx} = im \frac{cv_x}{v}, \\
 p_{my} = im \frac{cv_y}{v}, \\
 p_{mz} = im \frac{cv_z}{v}, \\
 p_{m\tau} = -m \frac{c^2}{v}, \\
 p_{mt} = im \frac{c^2}{v}.
 \end{array} \quad (53)$$

При скорости, направленной вдоль одной координаты x , получим

$$\begin{array}{l}
 p_{mx} = mv \\
 p_{m\tau} = imc \\
 v < c
 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l}
 p_{mx} = imc \\
 p_{m\tau} = -m \\
 u < c.
 \end{array} \quad (54)$$

Как видим, при переходе к сопряженному миру пространственные и временные компоненты импульса меняются местами.

§ 7. Четырехмерный вектор силы и энергия.

Аналогично четырехмерному вектору количества движения (импульса) строится четырехмерный вектор силы. По компонентам четырехмерного вектора скорости

$$V_{\kappa} = ic\alpha_{\kappa} = ic \frac{dx_{\kappa}}{ids} \quad \Bigg| \quad V_{\kappa} = ic\alpha_{\kappa} = ic \frac{dx_{\kappa}}{ds} \quad (55)$$

находим с помощью того же оператора компоненты четырехмерного ускорения

$$\omega_{\kappa} = ic \frac{dV_{\kappa}}{ids} \quad \Bigg| \quad \omega_{\kappa} = ic \frac{dV_{\kappa}}{ds}. \quad (56)$$

Умножая эти компоненты на массу покоя частицы, получим компоненты четырехмерного вектора силы

$$\begin{array}{l} f_{\kappa} = m_0 \omega_{\kappa} \\ f_{mx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_{mx}}{dt}, \\ f_{my} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_{my}}{dt}, \\ f_{mz} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_{mz}}{dt}, \\ f_{m\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_{m\tau}}{dt}, \\ f_{m1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_{m1}}{dt}, \\ \hat{F} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\hat{M}}{dt}, \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} f_{\kappa} = -m_0 \omega_{\kappa} \\ f_{mx} = \frac{ic}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \cdot \frac{dp_{mx}}{dt}, \\ f_{my} = \frac{ic}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \frac{dp_{my}}{dt}, \\ f_{mz} = \frac{ic}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \frac{dp_{mz}}{dt}, \\ f_{m\tau} = \frac{ic}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \frac{dp_{m\tau}}{dt}, \\ f_{m1} = \frac{ic}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \cdot \frac{dp_{m1}}{dt}, \\ \hat{F} = \frac{ic}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \cdot \frac{d\hat{M}}{dt}. \end{array} \quad (57)$$

Выражение $\sum_{\kappa} f_{\mu\kappa} \cdot v_{\mu\kappa} = 0$, справедливое для обычного мира, остается справедливым и для сопряженного мира. Если из 4-мерного вектора силы выделить 3-мерный вектор силы

$$(F_x, F_y, F_z) = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Bigg| \quad (F_x, F_y, F_z) = \frac{ic}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \cdot F, \quad (58)$$

то указанное соотношение запишется как

$$\frac{(F \cdot v)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{cF_t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \quad \left| \quad \frac{c^2 (Fv)}{v^2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)} - i \frac{F_t \cdot c^2}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} = 0\right.$$

или

$$F_t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{(Fv)}{c} \quad \left| \quad F_t \cdot \frac{v}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}} = i \frac{Fv}{c} \right. \quad (59)$$

Поскольку

$$F_t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad \left| \quad F_t = \frac{ic}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \frac{d}{dt} \left(- \frac{im_0 c^2}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right),\right.$$

то

$$\frac{d}{dt} (E) = (Fv) \quad \left| \quad c \frac{d}{dt} \left(- \frac{im_0 c^2}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right) = (Fv). \quad (60)$$

Последнее выражение для сопряженного мира можно записать подробнее как

$$\begin{aligned} c \frac{d}{dt} \left(- \frac{m_0 c^2}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right) &= v_x \frac{d}{dx} \left(- \frac{m_0 c v_x}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right) + \\ &+ v_y \frac{d}{dy} \left(- \frac{m_0 c v_y}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right) + v_z \frac{d}{dz} \left(- \frac{m_0 c v_z}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Если скорость v направлена вдоль оси x , то, обозначая

$$E = - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}, \text{ получим}$$

$$c \frac{d}{dt} \left(- \frac{m_0 c^2}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right) = v \frac{d}{dt} \left(- \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right) \quad (62)$$

$$v \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c} \right) = - ic \frac{dp'_{mt}}{dt} = c \frac{dp'_{mt}}{dt}.$$

Формула для

$$p'_{mt} = - \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \cdot \frac{c^2}{v} = - p_{m\tau} \quad (63)$$

дает соотношение

$$p'_{mt} = \frac{E}{v}. \quad (64)$$

Из формулы

$$E = - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}, \text{ подставляя туда выражение } v = \frac{E}{p'_{mt}},$$

получим

$$E = -c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_{mt}^2}, \quad (65)$$

Отсюда, беря производную по p_{mt} , можно получить формулу

$$\frac{\partial E}{\partial p_{mt}} = \frac{c^2}{v} = u. \quad (66)$$

Аналогичные соотношения для обычной механики имеют вид:

$$u = \frac{E}{p}; \quad E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}; \quad \frac{\partial E}{\partial p} = v. \quad (67)$$

Все эти формулы показывают, что физические величины, которые для обычного мира определяются скоростью v , для сопряженного мира определяются скоростью u и наоборот. Однако симметрия здесь неполная. Достаточно указать на выражение энергии частицы через импульс. Для обычного мира под корнем стоит квадрат трехмерного вектора импульса частицы, для сопряженного мира - квадрат временной компоненты четырехмерного вектора импульса.

Из всего здесь изложенного видно, что ничего кошунственного в том, что мы стали рассматривать скорости большие, чем скорость света, нет. Ввиду наличия у частиц двух скоростей при переходе в сопряженный мир скорости меняются ролями, причем в обоих случаях одна скорость меньше c , другая больше c .

Приведем здесь сравнительную таблицу основных физических величин для обычного мира, промежуточной области (света) и сопряженного мира.

	обычный мир	свет	сопряж. мир
скорости	$v < c, u > c$	$u = v = c$	$v > c, u < c$
массы покоя . .	$m_0 > 0$	0	$-m_0 < 0$
4-мерн. интервал	$i \hat{d}s$	0	$\hat{d}s$
4-мерн. скорость	$\hat{i}c$	c	$\hat{i}c$
4-мерн. импульс	$\hat{M} = \hat{i}c m_0$	$M = mc$	$\hat{M} = -\hat{i}c m_0$

Знак минус перед массой и энергией античастиц не делает эти величины фиктивными или неполноценными. Так же, как мнимая единица в сопряженных преобразованиях Лоренца говорит не о мнимости сопряженного мира, а только о том, что никаким изменением скорости мы частицу в сопряженный мир перевести не можем и что этот переход является качественным скачком (через превращение частиц), так и минус у массы и энергии античастиц означает, что масса и энергия связаны с принадлежностью частиц к обычному или сопряженному мирам и что при

слиянии частиц и античастиц должны выполняться определенные количественные соотношения. Эти соотношения пишутся в двух видах:

1. $E - (-E) = 2E$, когда учитывается общая энергия частицы и античастицы до слияния, энергия, которая после слияния делается энергией фотонов или других частиц;

2. $E + (-E) = 0$, когда оценивается энергия частиц после аннигиляции, в результате которой частицы, как таковые, исчезают, но их энергия, конечно, не исчезает, а становится энергией других частиц.

Поэтому нельзя рисовать переход на "отрицательные" уровни так, как это обычно делается (рис. 10). Соответствующая диаграмма должна изображаться в виде рис. 11. С отрицательных уровней естественным является переход не "вниз", а "вверх"! Как мы увидим дальше, свойствами характерными для сопряженного мира, обладают и обычные частицы и наоборот. Мир и "антимир" — это две стороны одной материальной сущности, выражаемой релятивистскими соотношениями без ограничения величины скорости.

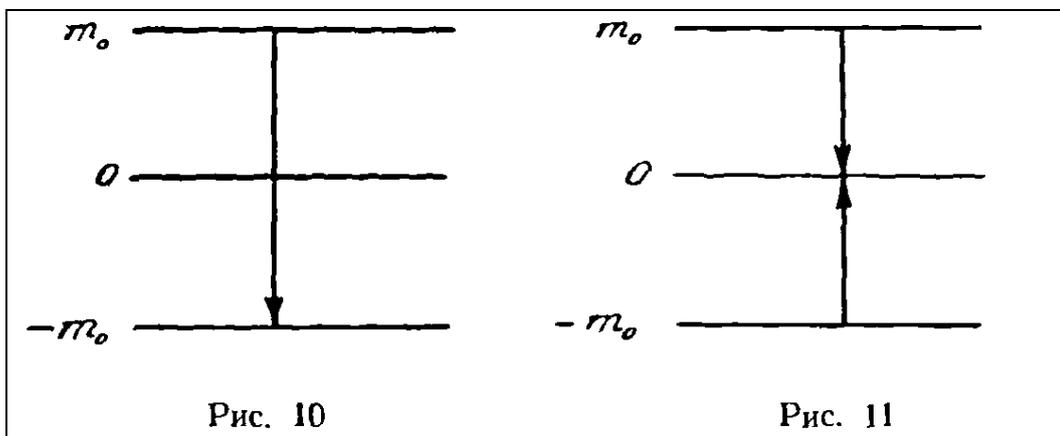


Рис. 10

Рис. 11

В заключение главы одно замечание относительно фотонов.

Если изобразить зависимость энергии (или массы) частиц и античастиц от скорости v , получим следующую диаграмму (рис. 12). Фотоны здесь занимают особое место. Если в классической механике скорость частицы при данной массе может быть любой, то для фотонов масса (а следовательно, и энергия) может быть любой, но только при одной фиксированной скорости c , т. е. фотон опять оказывается как бы классической частицей — крайности сходятся!

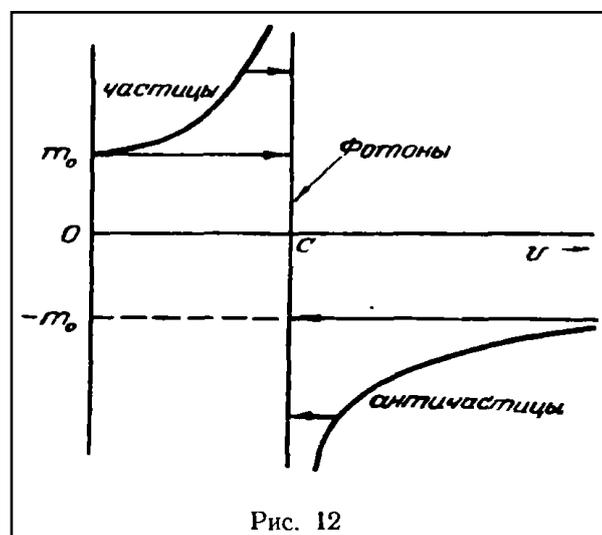


Рис. 12

§ 8. Функция действия для сопряженного мира.

Соотношение $p_i^2 = -m_0^2 c^2$ будет иметь место и для сопряженного мира.

Действительно, полагая

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x} &= -im_0 \frac{cv_x}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} = p_{mx}, & \frac{\partial S}{\partial z} &= -im_0 \frac{cv_z}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} = p_{mz}, \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= -im_0 \frac{cv_y}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} = p_{my}, & \frac{\partial S}{\partial t} &= i \frac{c}{v} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} = -\frac{ic}{v} E,\end{aligned}\quad (68)$$

получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = -m_0^2 c^2. \quad (69)$$

Можем проверить, что

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial x} \delta x + \frac{\partial S}{\partial y} \delta y + \frac{\partial S}{\partial z} \delta z + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t = 0. \quad (70)$$

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta t} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{u} \left(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t}, \frac{\delta z}{\delta t} \right)$$

или

$$\frac{\text{grad } S}{\frac{\partial S}{\partial t}} = -\frac{\mathbf{v}}{c^2} = -\frac{\mathbf{u}}{u^2}. \quad (71)$$

Из этого выражения и (69) можем снова получить выражения для $\frac{\partial S}{\partial t}$, $\frac{\partial S}{\partial x}$ и т. д. для сопряженного мира. Функция действия для свободно движущейся частицы будет

$$\begin{aligned}S &= -i \frac{m_0 cv_x}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} x - \frac{i}{v} \frac{m_0 cv_y}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} y - \\ &\quad - \frac{i}{v} \frac{m_0 cv_z}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} z + i \frac{m_0 c^3}{v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} t = \\ &= -im_0 c \int v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}} dt = -im_0 c \int ds; \\ ds &= v \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}} dt.\end{aligned}\quad (72)$$

Таким образом, и здесь равенство $\delta S = 0$ ни к каким противоречиям не приводит.

§ 9. Связь соотношений неопределенности с релятивистскими соотношениями.

Возьмем выражения для интервала события и квадрата четырехмерного

импульса частицы

$$x^2 - c^2 t^2 = -S^2 = inv,$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 = \text{const.}$$

Варьируя первое выражение и дифференцируя второе, получим

$$x \delta x = c^2 t \delta t,$$

$$\frac{E \Delta E}{c^2} = p \Delta p. \quad (73)$$

Иначе

$$\frac{x}{t} \cdot \frac{\delta x}{\delta t} = c^2; \quad v = \frac{x}{t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad u = \frac{\delta x}{\delta t}.$$

С другой стороны,

$$\frac{E}{p} = u = \frac{\delta x}{\delta t}, \quad \frac{\Delta E}{\Delta p} = \frac{pc^2}{E} = \frac{c^2}{u} = v. \quad (74)$$

Таким образом, $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta p}$ или

$$\Delta x \cdot \Delta p = \Delta E \cdot \Delta t. \quad (75)$$

Это соотношение получается порядка величины постоянной Планка h . Конечно, и это соотношение может быть получено из второго уравнения (73) без использования связи $vi = c^2$, но тем самым будет теряться очень существенная закономерность, имеющая далеко идущие последствия.

Глава II

ОБОСНОВАНИЕ НЕОБХОДИМОСТИ ВТОРОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. О смысле второй (вариационной) скорости частиц.

Смысл скорости $\delta x/\delta t$ можно понять, рассмотрев так называемое гиперболическое движение материальной точки, описываемое уравнениями (для простоты рассматриваем одномерные движения) (рис. 13).

$$c^2 t^2 - x^2 = a^2 \quad (75)$$

$$x^2 - c^2 t^2 = a^2 \quad (76)$$

Дифференцируя уравнение (75), получим

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{x}{t} = c^2. \quad (77)$$

Здесь $x/t < c$ не будет скоростью частицы, совершающей гиперболическое движение, хотя и имеет равномерность скорости. Скоростью будет производная dx/dt . Эта скорость $> c$ и по величине будет равна скорости $\delta x/\delta t$ равномерного прямолинейного движения материальной точки, мировая линия которой проходит через рассматриваемую точку мировой линии гиперболического движения (рис. 14). Если взять гиперболическое движение, описываемое уравнением (76), то скорость его также будет удовлетворять уравнению (77), однако здесь отношение $x'/t' > c$ и скорость $dx'/dt' < c$. В табл. 1 показана связь величин скоростей равномерного прямолинейного и гиперболического движений.

В мнимой системе координат мировая линия гиперболического движения будет окружностью с

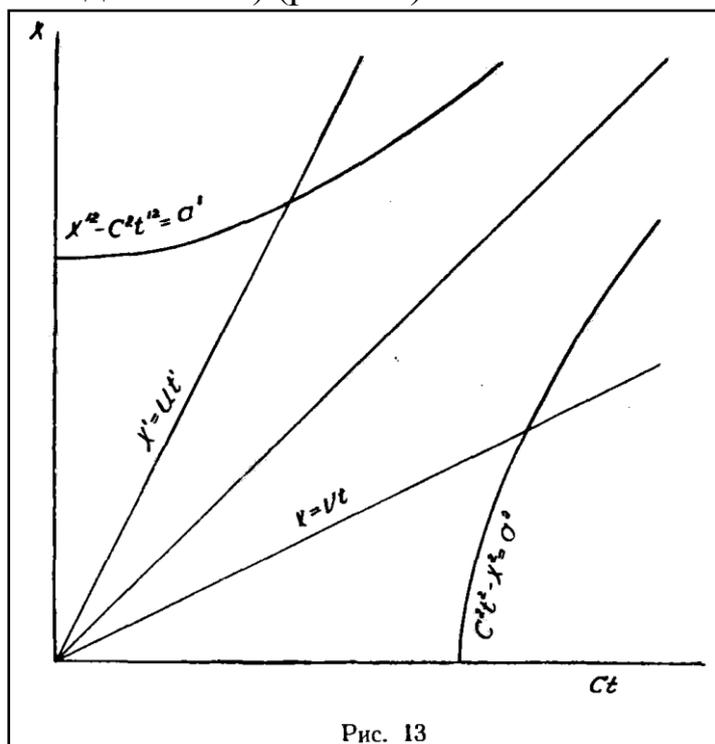


Рис. 13

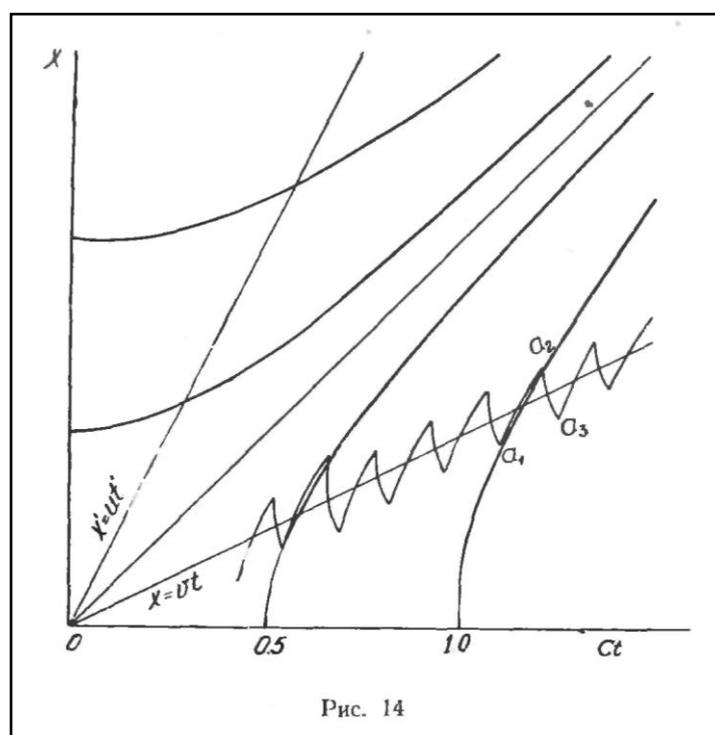


Рис. 14

радиусом a :

$$(x^1)^2 + (x^4) = a^2 \quad (78)$$

Таблица 1		
Скорости прямолинейного движения	Скорости гиперболических движений	
	$c^2 t^2 - x^2 = a^2$	$x'^2 - c^2 t'^2 = a^2$
$v = \frac{x}{t} < c$ $u = \frac{\partial x}{\partial t} > c$	$v = \frac{dx}{dt} > c$	
$v' = \frac{x'}{t'} > c$ $u' = \frac{\partial x'}{\partial t'} < c$		$v' = \frac{dx'}{dt'} < c$

"Поскольку в каждой точке произвольной кривой на плоскости $x^1 = x$, $x^4 = ict$ можно построить соприкасающуюся окружность, любому движению материальной точки в любой момент будет сопоставлено соприкасающееся гиперболическое движение" [5]. Движение по гиперболе $x'^2 - c^2 t'^2 = a^2$ будет происходить под действием постоянной силы $K = m_0 c^2 / a$. Действительно, поскольку $dx'/dt' < c$, то сила будет выражаться формулой

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \dot{x}'}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}'^2}{c^2}}} \right). \quad (79)$$

Используя равенство $\dot{x}' \cdot \frac{x'}{t} = c^2$, получим $\ddot{x}' = \frac{\dot{x}'}{t} - \frac{\dot{x}'^2}{x'}$.
Отсюда и получается, что

$$\frac{dp}{dt} = K = \frac{m_0 c^2}{a}. \quad (80)$$

Движение по гиперболе $c^2 t^2 - x^2 = a^2$ получается под действием силы

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \right) = iK. \quad (81)$$

Здесь $v = \frac{dx}{dt} > c$ и $a = \frac{m_0 c^2}{K}$.

Если связь между скоростью dx/dt равномерного прямолинейного движения и скоростями гиперболических движений не случайна, а имеет физическую основу, то кроме силы K (iK), которая увлекает точку на гиперболическое движение, должна существовать вторая сила, которая уравнивает (хотя бы в среднем) первую, благодаря чему частица будет двигаться равномерно и прямолинейно.

Рассмотрим равномерное прямолинейное движение точки как непрерывный переход точки с одной гиперболы на другую (от одного значения a к другому). Подставляя в уравнение (75) выражение $x = vt$ ($v < c$) и считая a переменной величиной, найдем выражение для второй силы.

Очевидно, так как $a = t \sqrt{c^2 - v^2}$, то

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{c^2 - v^2}. \quad (82)$$

Поскольку $a = \frac{m_0 c^2}{K}$, то

$$\frac{da}{dt} = -\frac{m_0 c^2}{K^2} \cdot \frac{dK}{dt}. \quad (83)$$

Отсюда

$$K = \frac{m_0 c}{t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad Kt = p_1. \quad (84)$$

Подставляя $v = c^2/u$, получим

$$ip_1 = p = \frac{im_0 c}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{u^2}}}. \quad (85)$$

Это формула импульса частицы сопряженного мира. Таким образом, частица, движущаяся равномерно и прямолинейно, получает равные и противоположно направленные импульсы от двух сил. Предположение о наличии двух сил открывает возможности для объяснения волн де Бройля. Можно считать, что равновесие между этими силами выполняется только в среднем, а на самом деле эти силы находятся в непрерывной борьбе друг с другом, периодически перебарывая друг друга. В частности, можно, например, считать, что на участке $a_1 a_2$ (рис. 14) частица совершает гиперболическое движение в одном направлении под действием только одной силы, на участке $a_2 a_3$ —также гиперболическое движение, но в противоположном направлении под действием противоположной силы и т. д. В среднем частица находится на линии $x = vt$, колеблясь около нее с амплитудой, пропорциональной длине волны де Бройля. Нужно заметить, что, с точки зрения наблюдателя, из обычного мира эти силы являются мнимыми. Аналогичные рассуждения можно провести для гипербол (76) (рис. 15)

Эти гиперболы будут пересекаться не с прямой $x = vt$, а с сопряженной

прямой $x^1 = ut'$. Здесь силы, действующие на сопряженную частицу, будут действительными силами, дающими импульс $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $v < c$.

. И здесь можно предположить, что эти силы будут вызывать колебательное движение частиц вдоль прямой $x^1 = ut'$, с пространственной амплитудой, пропорциональной длине волны де Бройля.

Если считать, что каждая частица имеет сразу две скорости, т. е. одновременно совершает два движения ($x = vt$ и $x^1 = ut'$), то это будет равноценно утверждению, что частица совершает одновременно два колебательных движения с одной длины волны, но с разными частотами и разными скоростями распространения (v и u).

Движение по гиперболическим пилообразным кривым является, конечно, идеализацией. Фактические движения идут по более сложным периодическим кривым, структура которых выяснится позднее.

Таким образом, с одной стороны, скорость $\delta x / \delta t = u > c$ имеет смысл средней скорости перемещения колеблющейся точки вдоль прямой $x^1 = ut'$. Точно так же, как обычная скорость $v < c$ приобретает смысл средней скорости перемещения колеблющейся точки вдоль прямой $x = vt$.

С другой стороны, эти скорости имеют особый микроскопический квантовый смысл как скорости некоторых движений частиц, которые проявляются во вне как волновые свойства частиц. "Сопряженность" этих скоростей видна из табл. 2 (см. также рис. 16).

§ 2. О возможности второго волнового уравнения для частиц.

Как мы видели в предыдущем параграфе, с каждой частицей должен быть

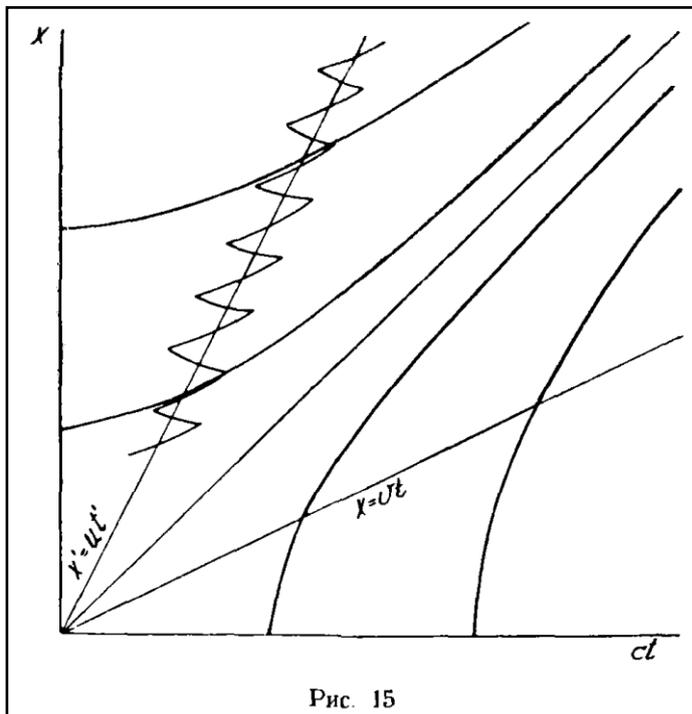


Рис. 15

Т а б л и ц а 2	
Средние скорости частиц	Скорости квантовых движений
$\frac{\delta x}{\delta t} = u > c$	$v < c$
$v < c$	$\frac{\delta x}{\delta t} = u > c$

связан некоторый волновой процесс. Существование этого процесса можно рассматривать и как опытный факт, подтверждающий известную гипотезу де Бройля, согласно которой соотношения, имеющие место для света

$$E = h\nu = mc^2, \quad (86)$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = mc = \frac{h}{\lambda}$$

(эти соотношения вытекают и из рассуждений предыдущего параграфа при переходе к предельному случаю, когда v делается равным u), могут быть распространены и на обычные частицы. При этом первое соотношение оставалось неизменным по форме

$$E = mc^2 \quad (87)$$

(только подразумевалось, что

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

во втором же соотношении менялось c на v

$$p = mv = \frac{h}{\lambda}. \quad (88)$$

Отсюда сразу же получилась знаменитая длина "волны де Бройля"

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (89)$$

Скорость распространения такой волны будет

$$v\lambda = \frac{mc^2}{h} \cdot \frac{h}{mv} = \frac{c^2}{v} = u > c. \quad (90)$$

Поскольку речь шла о волнах, то эту скорость можно было считать "фазовой" скоростью. В связи с этим то, что она оказалась $> c$, никого не смущало, тем более, что можно было обычным путем получить выражение для "групповой" скорости

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d\left[\frac{mc^2}{h}\right]}{d\left[\frac{mv}{h}\right]} = v < c. \quad (91)$$

Групповая скорость оказалась равной обычной скорости частицы $v < c$. Однако представить частицу как "группу волн" не удастся. С нашей точки зрения, никакой "групповой" или "фазовой" скорости частиц не существует, а v и u суть скорости частиц, которые можно рассматривать и безотносительно к волновым свойствам частиц. Связь же этих скоростей с

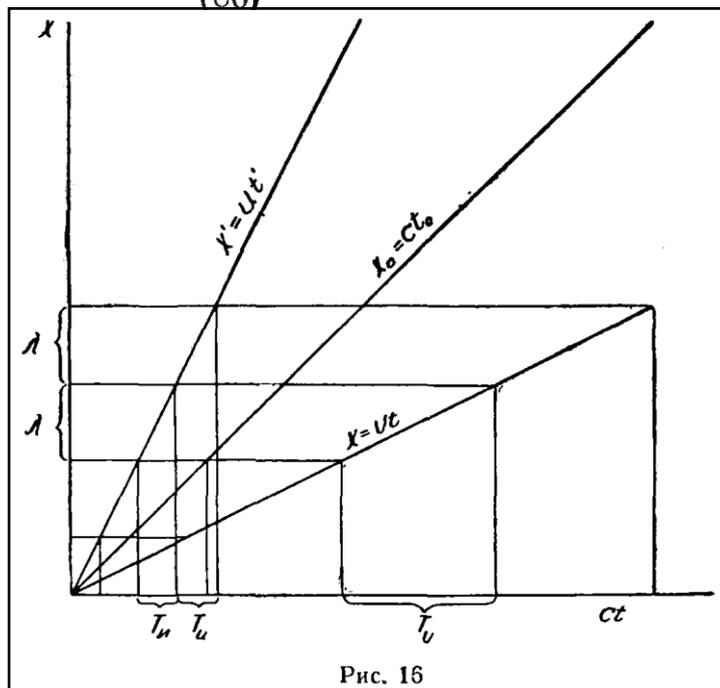


Рис. 16

волновыми свойствами имеет более глубокий смысл, о чем мы еще будем не раз говорить дальше.

В связи с известной равноправностью скоростей v и u возможно пойти по пути, отличном от дебройлевского. Можно написать

$$\begin{aligned} E_v &= mv^2 = h\nu_v, \\ p &= \frac{h}{\lambda} = mv, \end{aligned} \quad (92)$$

т. е. заменить c на v не только в выражении для импульса, но и в выражении для энергии. Тогда для длины волны будет то же выражение $\lambda = h/mv$, но для скорости волны получим

$$\nu_v \cdot \lambda = \frac{mv^2}{h} \cdot \frac{h}{mv} = v, \quad (93)$$

т. е. получается вторая волна, для которой "фазовая" скорость будет равна $v < c$. Будет ли скорость u "групповой" скоростью для этого случая?

$$u_{\text{гр}} = \frac{d\nu_v}{d\left[\frac{1}{\lambda}\right]} = \frac{d\left[\frac{mv^2}{h}\right]}{d\left[\frac{mv}{h}\right]} = 2v \left[1 - \frac{v^2}{2c^2}\right].$$

Таким образом, здесь $u_{\text{гр}}$ не совпадает с u .

Поскольку, как мы увидим дальше, со скоростью V также связан волновой процесс, совпадение скорости v частиц с "групповой" скоростью волны, распространяющейся со скоростью $u > c$, является чисто случайным и никакого физического смысла не имеет.

Далее мы рассмотрим вывод уравнения для частиц, исходя из уравнения волны, распространяющейся со скоростью $u > c$

$$\Delta\psi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad (94)$$

которое будем называть u -уравнением, и, исходя из уравнения волны, распространяющейся со скоростью $u < c$

$$\Delta\psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad (95)$$

получим уравнение для частиц, которое будем называть v -уравнением.

§ 3. Вывод u -уравнения [6].

Возьмем выражение для плоской волны, распространяющейся в направлении, задаваемом направляющими косинусами $m = \cos(\hat{n}, y)$, $l + \cos(\hat{n}, x)$, $n = \cos(\hat{n}, z)$

$$\chi = e^{2\pi i \left(\frac{lx}{\lambda} + \frac{my}{\lambda} + \frac{nz}{\lambda} - \nu t \right)}. \quad (96)$$

Подставляя вместо λ длину волны де Бройля и считая величину $1/\lambda$ вектором со слагающими l/λ , m/λ , n/λ получим выражение для плоской волны де Бройля:

$$\chi = e^{\frac{2\pi i}{h}(p_x x + p_y y + p_z z - Et)}. \quad (97)$$

Дифференцируя это выражение по координатам и времени, легко убедиться, что

$$\Delta\chi = -\frac{4\pi^2}{h^2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\chi; \quad \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2} \frac{E^2}{u^2} \chi, \quad (98)$$

т. е. удовлетворяется волновое уравнение

$$\Delta\psi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Если, однако, в последнем уравнении вторую производную $\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$ разделить не на u^2 , а на c^2 , то получим

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2} p^2 \chi + \frac{1}{c^2} \frac{4\pi^2 E^2}{h^2} \chi = \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \chi, \quad (99)$$

$$\Delta\chi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$$

т. е. уравнение Клейна-Гордона. Поскольку $\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$, то мы можем получить уравнение для выделения временного множителя.

Последовательно имеем:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{c^2} \right] \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \chi, \\ \frac{1}{c^2} \left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right] \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \chi, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^2 \chi = -\frac{4\pi^2 E^2}{h^2} \chi. \end{aligned} \quad (100)$$

Если полная релятивистская энергия E постоянна, то временная часть функции χ будет иметь вид

$$\chi(t) = A e^{i \frac{2\pi E}{h} t}, \quad (101)$$

Подставляя теперь значение второй производной по времени в уравнение Клейна-Гордона, получим уравнение для пространственной части функции $\chi(r)$

$$\Delta\chi + \left[\frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^2 - \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \right] \chi = 0 \quad (102)$$

или

$$\Delta\chi + \frac{4\pi^2}{h^2} p^2 \chi = 0, \quad (103)$$

$$\frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) = \frac{4\pi^2}{h^2} p.$$

так

как

В нерелятивистском случае, когда $p = m_0 v$, получим обычное уравнение Шредингера для свободной частицы.

§ 4. Вывод v -уравнения.

Проделаем теперь аналогичные выкладки для волнового процесса со скоростью $v < c$. В выражение для плоской волны

$$\chi = e^{2\pi i \left(\frac{lx}{\lambda} + \frac{my}{\lambda} + \frac{nz}{\lambda} - vt \right)} \quad (104)$$

мы также должны ввести слагающие четырехмерного импульса, подобно тому, как это было сделано при выводе u -уравнения. Но там при скорости волны $u > c$ мы брали компоненты импульса и энергию обычного мира, здесь же компоненты импульса и энергию сопряженного мира, т. е. набору

$$(p_x, p_y, p_z, p_t)$$

будет соответствовать набор

$$\left[i \frac{mcv_x}{v}, i \frac{mcv_y}{v}, i \frac{mcv_z}{v}, imv \right].$$

Здесь $v > c$, $u < c$. Поскольку мы хотим применить эти соотношения для частиц обычного мира, мы меняем обозначения в соответствии с тем, будет ли скорость больше или меньше скорости света, т. е. берем набор

$$\left[i \frac{m c u_x}{u}, i \frac{m c u_y}{u}, i \frac{m c u_z}{u}, imv \right],$$

(i можно отбросить, так как нас интересует внутреннее отношение компонент импульса).

Тогда для функции χ получится выражение

$$\chi = e^{\frac{2\pi v}{h c} i \left(\frac{m c u_x}{u} x + \frac{m c u_y}{u} y + \frac{m c u_z}{u} z - m c v t \right)} \quad (105)$$

или

$$\chi = e^{\frac{2\pi v}{h c} i \left(p'_x x + p'_y y + p'_z z - E \frac{v}{c} t \right)} \quad (106)$$

Здесь подставлено

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad l = \frac{u_x}{u}, \quad m = \frac{u_y}{u}, \quad n = \frac{u_z}{u}, \quad v_v = \frac{v}{\lambda} = \frac{mv^2}{h}.$$

Дифференцируя по координатам и времени, получим

$$\Delta \chi = -\frac{4\pi^2}{h^2} \frac{v^2}{c^2} (mc)^2 \chi; \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{4\pi^2 v^3}{h^2 c^2} \left[\frac{vE}{c} \right]^2 \chi, \quad (107)$$

т. е. удовлетворяется уравнение

$$\Delta\chi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}.$$

Если вторую производную по времени разделить не на v^2 , а на c^2 , получим уравнение, напоминающее уравнение Клейна-Гордона

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \frac{4\pi^2 v^2}{h^2 c^2} \left[(mc)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{vE}{c} \right)^2 \right] \chi = - \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 v^2 \chi. \quad (108)$$

(Релятивистская инвариантность этого уравнения рассматривается в следующем параграфе).

При $m_0 = 0$ оба уравнения переходят в уравнение

$$\Delta\chi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}.$$

Выделим теперь временной множитель аналогично u -уравнению,

подставив $\Delta\chi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$ в уравнение (108)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= - \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 v^2 \chi, \\ \frac{1}{v^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= - \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 v^2 \chi, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= - \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} \chi. \end{aligned} \quad (109)$$

Если скорость v постоянна, можно получить временной множитель в виде

$$\chi(t) = A e^{i \frac{2\pi}{h} m v^2 t}. \quad (110)$$

Подставляя значение второй производной по времени в уравнение, аналогичное уравнению Клейна-Гордона, мы получим для случая свободной частицы уравнение для пространственной части функции χ

$$\Delta\chi + \left[\frac{4\pi^2}{h^2} \frac{m^2 v^4}{c^2} + \frac{4\pi^2 m_0^2 v^2}{h^2} \right] \chi = 0 \quad (111)$$

или

$$\Delta\chi + \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 v^2 \chi = 0.$$

Поскольку $p = mv$, то это уравнение по форме совпадает с уравнением для соответствующего случая u -уравнения. Различие будет в частоте колебаний, будет другим и истолкование самой функции χ .

§ 5. Релятивистская инвариантность u -уравнения.

Релятивистская инвариантность обычного уравнения Клейна-Гордона (99) очевидна, так как два первых его члена совпадают с соответствующими членами волнового уравнения Даламбера, релятивистская инвариантность

которого хорошо известна из электродинамики. Инвариантность

члена $\frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \psi$ также очевидна, поскольку $\frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2$ есть скаляр, не зависящий от системы отсчета.

С инвариантностью ν -уравнения $\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 v^2 \psi$ дело обстоит сложнее. Прежде всего, встает вопрос о природе функции ψ . Если считать ψ -функцию скалярной величиной, то наше уравнение не будет инвариантным. Известно, однако, что уравнения электромагнитных потенциалов

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \quad (112)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

образуют релятивистски инвариантную систему. Релятивистская инвариантность этой системы непосредственно вытекает из того, что эта система может быть без всяких изменений записана в 4-мерной форме [8]. Можно предположить, что и ψ -функция нашего релятивистского ν -уравнения представляет собой 4-мерный вектор, и что мы можем наше уравнение записать в форме системы уравнений

$$\Delta \mathbf{A}^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^*}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 v^2 \mathbf{A}^*, \quad (113)$$

$$\Delta \varphi^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 v^2 \varphi^*.$$

Звездочкой мы обозначаем "потенциалы", представляющие 4-мерный вектор ψ -функции нашего уравнения, чтобы не путать их с обычными электромагнитными потенциалами.

Поскольку наше ν -уравнение должно выражать воздействие среды на массу материальных частиц безотносительно к их заряду, мы попробуем сопоставить правые части систем (112) и (113) чисто формально (левые части систем идентичны по форме, поэтому инвариантность нашей системы будет определяться только характером правых частей). Обозначим

$$\frac{\pi}{h^2} m_0^2 v^2 \varphi^* = \rho, \quad (114)$$

$$\frac{\pi}{h^2} m_0^2 v^2 \mathbf{A}^* = \frac{\rho \mathbf{v}}{c}$$

или

$$\frac{\pi}{h^2} m_0^2 \mathbf{v} \left(\mathbf{v} \frac{\mathbf{A}^* c}{c} \right) = \frac{\pi}{h^2} m_0^2 \frac{\mathbf{v}}{c} (v^2 \varphi^*). \quad (115)$$

Отсюда, считая вектор \mathbf{A}^* направленным вдоль вектора скорости \mathbf{v} ,

$$vA^*c = v^2 \varphi^*; A^* = v \frac{|A^*|}{|v|}, \quad \varphi^* = \frac{c}{|v|} |A^*|. \quad (116)$$

Для обычной плотности тока и плотности заряда имеет место соотношение

$$\operatorname{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (117)$$

В нашем случае, поскольку скорость v постоянна, получим

$$\operatorname{div}(v^2 A^* c) + \frac{\partial}{\partial t} v^2 \varphi^* = 0. \quad (118)$$

или

$$\operatorname{div} A^* + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, правые части нашей системы (113) могут быть выражены в четырехмерной форме

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial j_\tau}{\partial \tau} = 0. \quad (119)$$

Здесь

$$j_x = \rho v = |A^*|, \quad j_y = 0, \quad j_z = 0, \quad j_\tau = ic\rho = \dot{\varphi}^*$$

(скорость v направлена вдоль оси x).

Из этих соотношений можно получить закон изменения, например, функции φ^* при преобразовании координат. Поскольку для обычной плотности заряда и тока имеем

$$\rho' = \frac{\rho \left[1 - \frac{V}{c^2} v_x \right]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (120)$$

и $v_x^2 \varphi \rightarrow \rho$, то

$$v_x^2 \cdot \varphi' = \frac{v_x^2 \varphi \left[1 - \frac{V}{c^2} v_x \right]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

С другой стороны, скорость преобразуется как

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}},$$

то для φ' получаем следующую формулу преобразования

$$\varphi' = \varphi \frac{v_x^2 \left(1 - \frac{V}{c^2} v_x \right)^3}{(v_x - V)^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (121)$$

Приведенное нами сопоставление квантовых потенциалов A^* , φ^* с

электромагнитными плотностями тока и заряда \mathbf{j} , ρ может быть продолжено на всю систему уравнений Максвелла. Таким образом может быть получена система уравнений, описывающих квантовое поле, возбуждаемое движущейся частицей безотносительно к ее заряду

Уравнения электро- магнитного поля	Уравнения квантового поля
$H = \text{rot } A$	$H^* = \text{rot } A^*$ (122)
$\text{rot } H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$	$\text{rot } H^* = \frac{1}{c} \frac{\partial E^*}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^*$ (123)
$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$	$\mathbf{j}^* = \frac{\pi c}{h^2} m_0^2 v^2 \mathbf{A}^*$ (124)
$E = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$	$\text{rot } E^* = -\frac{1}{c} \frac{\partial H^*}{\partial t}$ (125)
$\text{div } E = 4\pi \rho$	$E^* = -\text{grad } \varphi^* - \frac{1}{c} \frac{\partial A^*}{\partial t}$ (126)
$\text{div } A = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$	$\text{div } E^* = 4\pi \rho^*$ (127)
$F = eE + \frac{e}{c} [\mathbf{v}H]$	$\rho^* = \frac{\pi}{h^2} m_0^2 v^2 \varphi^*$ (128)
	$\text{div } A^* = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}$ (129)
	(совпадает с
	$\text{div } \mathbf{j}^* + \frac{\partial \rho^*}{\partial t} = 0)$
	$F^* = E^* + \frac{1}{c} [\mathbf{v}H^*].$ (130)

Переход к слагающим квантового поля H^* и E^* позволяет просто выразить трансформационные свойства поля при переходах от одной системы отсчета к другой. Аналогично тензору электромагнитного поля можем написать

$$F_{i\kappa}^* = \frac{\partial A_\kappa^*}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i^*}{\partial x_\kappa},$$

$$F_{11}^* = F_{22}^* = F_{33}^* = F_{44}^* = 0,$$

$$F_{12}^* = -F_{21}^* = H_z^*, \quad F_{14}^* = -F_{41}^* = -iE_x^*,$$

$$F_{13}^* = -F_{31}^* = -H_y^*, \quad F_{21}^* = -F_{42}^* = -iE_y^*,$$

$$F_{23}^* = -F_{32}^* = H_x^*, \quad F_{34}^* = -F_{43}^* = -iE_z^*.$$
(131)

Уравнение движения других частиц, попадающих в это поле, будет

$$m_0 \frac{du_i}{ds} = \frac{1}{c} F_{i\kappa}^* u_\kappa, \quad (132)$$

Аналогично могут быть написаны и другие соотношения, подобные соответствующим выражениям электромагнитной теории.

§ 6. *u*- и *v*-уравнения для связанных систем.

u-уравнение

Для частиц, находящихся в поле сил, описываемых потенциальной функцией $V(x, y, z)$, волновое уравнение строится следующим образом. Для свободной частицы частоту, определяющую временной множитель, можно получить из соотношения $v\lambda = u$. Отсюда

$$v = \frac{c^2}{v} \cdot \frac{mv}{h} = \frac{E}{h}, \quad \omega = \frac{2\pi E}{h}; \quad (E = mc^2). \quad (132)$$

Для пространственной части получится уравнение

$$\Delta\psi + \frac{\omega^2}{u^2} \psi = 0, \quad (133)$$

которое, очевидно, совпадает с уравнением (103), если подставить

$$\omega = \frac{2\pi mc^2}{h}; \quad u = \frac{c^2}{v}.$$

Для частиц в поле сил λ и u будут функциями положения частиц. Можно написать

$$\int v\lambda dx = \int u dx \quad (134)$$

(для простоты рассуждения проводим для одномерных задач). Вынося по теореме о среднем v за знак интеграла, получим

$$\bar{v} = \frac{c^2}{h} \frac{\int \frac{dx}{v}}{\int \frac{dx}{mv}}. \quad (135)$$

Для нерелятивистского случая получится

$$\bar{v} = \frac{m_0 c^2}{h} \frac{\int \frac{dx}{v}}{\int \frac{1}{v} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) dx} = \frac{m_0 c^2}{h} \left[1 + \frac{\int v dx}{2c^2 \int \frac{dx}{v}} \right]. \quad (136)$$

Задавая $v = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}$, можно вычислить v . Частота $\omega = 2\pi v$

естественно разбивается на два слагаемых $\omega_0 = \frac{2\pi m_0 c^2}{h}$ и $\omega_{кл} = f(E_{кл})$, причем $\omega_0 \gg \omega_{кл}$. Пространственная часть *u*-уравнения будет иметь знакомую форму

$$\Delta\psi(x) + \frac{\omega^2}{u^2} \psi(x) = 0, \quad (133)$$

но здесь для ω берем только ω_0 и вместо u ставим

$$u = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}}. \quad (137)$$

Таким образом получается обычное нерелятивистское уравнение

Шредингера

$$\Delta\psi(x) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E_{\text{кл}} - V(x)) \psi(x) = 0. \quad (138)$$

Временной множитель, если его оставить в экспоненциальной форме, например, в виде

$$e^{i \left(2\pi\nu_0 + \frac{2\pi E_{\text{кл}}}{h} \right) t} = e^{i2\pi\nu_0 t} \cdot e^{i \frac{2\pi E_{\text{кл}} t}{h}}, \quad (139)$$

можно всегда сократить на любой множитель. Оставляют обычно

множитель в форме $e^{i \frac{2\pi}{h} E_{\text{кл}} t}$. Тем самым устраняется необходимость знать орбиту частиц для вычисления ν . Верно этим самым затушевывается связь уравнения Шредингера с волновым уравнением

$$\Delta\psi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Если включить в ψ -функцию временной множитель, можно написать

$$\Delta\psi(r, t) + \frac{8\pi^2}{h^2} m_0 (E_{\text{кл}} - V(r)) \psi(r, t) = 0. \quad (140)$$

Беря временной множитель в обычной форме, будем иметь

$$\frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = i \frac{2\pi E_{\text{кл}}}{h} \psi(r, t) \quad (141)$$

и уравнение с временным множителем запишется в виде

$$\Delta\psi(r, t) - \frac{8\pi^2 m_0}{h^2} V(r) \psi(r, t) = i \frac{4\pi m_0}{h} \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t}. \quad (142)$$

Тем самым уравнение Шредингера со временем подгоняется под уравнение выравнивания [7]. Такая форма уравнения дает возможность сопоставить классическим механическим величинам определенные математические операторы: слагающая импульса p_x заменяется на оператор $-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$ и т. п. Это дает в распоряжение обычной квантовой механики мощный математический аппарат, но одновременно и подчиняет ее этому аппарату. Аналогично тому, как выбор формулировки постулата о параллельных в геометрии ведет с необходимостью к одному из видов неевклидовой геометрии. Если добавить к этому граничные условия для стационарных задач $\psi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, которые пришлось принять, чтобы получить правильное квантование энергии атома водорода, то делается неудивительным, что обычная квантовая механика получила статистическое истолкование.

v-уравнение

Для ν -уравнения свободной частицы частота, фигурирующая во временном множителе (ПО), может быть определена из соотношения $\lambda\nu = \nu$:

$$\nu = \frac{mv^2}{h} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{2\pi mv^2}{h}. \quad (143)$$

Здесь частота выражается через энергию

$$E_v = mv^2 = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$E_u = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а не через энергию, как для u -уравнения. Поэтому для

$$\omega_0 = \frac{2\pi m_0 c^2}{h}$$

связанных систем нельзя выделить частоту и вообще не будет тех возможностей, как для u -уравнения. Но зато появляется возможность подойти ко всем проблемам с более "механической" точки зрения, начиная с определения квантовой частоты, входящий во временной множитель ψ -функции.

Поскольку λ и v для связанных систем являются функциями координат, мы можем написать

$$\int \lambda ds = \int v ds, \quad (144)$$

отсюда

$$\bar{v} = \frac{\int v ds}{\int \lambda ds}. \quad (145)$$

Поскольку такая характеристика волнового процесса, связанного с

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

движением частицы, как длина волны де Бройля, определяется скоростью классического движения частицы v , то логично будет для определения v производить интегрирование вдоль траектории классического движения частицы в данном поле сил. Таким образом получим

$$\bar{\omega} = 2\pi\bar{v} = 2\pi \frac{\int v ds}{\int \lambda ds} = 2\pi \frac{\bar{v}}{\lambda}. \quad (146)$$

Другими словами, мы должны усреднить по данной классической траектории отдельно скорость частицы и волну де Бройля. Частное их даст среднюю частоту квантовых колебаний. Определив квантовую частоту, можем написать уравнение для пространственной части ψ -функции

$$\Delta\psi + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0. \quad (147)$$

Для нерелятивистского случая ω будет выражаться через $E_{\text{кл}}$ (нерелятивистскую полную энергию частицы) и

$$v^2 = \frac{2}{m} (E_{\text{кл}} - V(\mathbf{r})).$$

Таким образом получим уравнение

$$\Delta\psi(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2(E_{\text{кл}}) \cdot m}{2(E_{\text{кл}} - V(\mathbf{r}))} \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (148)$$

Это уравнение отличается от уравнения Шредингера прежде всего математически. В связи с этим делается непригодной и прежняя интерпретация решения этого уравнения. Новая интерпретация будет полностью рассмотрена дальше, здесь пока обратим внимание на то, что в точках, где $E_{\text{кл}} = V(\mathbf{r})$, т. е. на классических границах движения материальных частиц в потенциальных ямах, коэффициент при $\psi(\mathbf{r})$ обращается в бесконечность, поэтому и решение уравнения $\psi(\mathbf{r})$ в этих точках должно обрываться, обращаясь в нуль, а не уходить за классические границы, как это имеет место в механике Шредингера. Это дает возможность трактовать решение ν -уравнения как функцию, описывающую стоячую волну. Для образования стоячих волн необходимо, чтобы в каждой точке пространства сходились волны с определенными фазами и результирующее отклонение выразилось бы в виде произведения

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \cdot \psi(t). \quad (149)$$

Величина $\psi(\mathbf{r}, t)$ во всех точках пространства совершает гармоническое колебание с одинаковой частотой и фазой, но амплитуда колебания различна для различных точек пространства. Таким образом, временной множитель ψ -функции ν -уравнения нужно брать не в мнимой, а в действительной форме, в виде, например, $\cos\omega t$.

Глава III

КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ БЕЗ ВРАЩЕНИЯ

§ 1. Свободная частица.

Для прямолинейно; движущейся свободной частицы v -уравнение для скалярной ψ -функции можно написать в цилиндрической системе координат с осью z вдоль направления скорости частицы

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (150)$$

Ввиду постоянства скорости квантовая частота ν_v определится просто

$$\omega_{\text{кв}} = 2\pi\nu_v = 2\pi \frac{v}{\lambda} = \frac{2\pi m v^2}{h}; \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (151)$$

Временной множитель можно взять в виде $\psi(t) = \begin{matrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{matrix}$, тогда

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_{\text{кв}}^2 \psi(t) \cdot \psi(r, z). \quad (152)$$

Уравнение для пространственной части функции $\psi(r, z)$ будет выглядеть как

$$\frac{\partial^2 \psi(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi(r, z)}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} \psi(r, z) = 0. \quad (152)$$

Уравнение допускает разделение переменных, полагаем

$$\psi(r, z) = w(r) \cdot U(z)$$

$$\frac{1}{w(r)} \frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{w(r) \cdot r} \frac{dw(r)}{dr} + \frac{1}{U(z)} \frac{d^2 U(z)}{dz^2} + \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} = 0. \quad (154)$$

Постоянную разделения принимаем равной нулю, так как нет физических оснований для другого выбора. Таким образом получим два уравнения

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0; \quad \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} u = 0. \quad (155)$$

Для первого уравнения физически пригодным будет только решение $w = \text{const}$. Для второго уравнения решение будет иметь вид

$$u(z) = \frac{\cos \frac{2\pi m v}{h} z}{\sin \frac{2\pi m v}{h} z} \quad (156)$$

Полное решение ψ запишется как

$$\psi = A \sin \frac{2\pi m v^2}{h} \left(t - \frac{z}{v} \right) \quad (157)$$

Для векторной ψ -функции мы должны брать слагающую вдоль оси z - A_z , решение формально будет таким же, как и для скалярной ψ -функции.

§ 2. Частица в одномерной прямоугольной яме.

В стационарном состоянии в яме должна существовать стоячая волна. Для получения квантовой частоты $\omega_{\text{кв}}$ и периода $T_{\text{кв}}$ в данной задаче не требуется производить усреднение v и λ , так как внутри ямы скорость частицы остается постоянной от одного столкновения со стенкой до другого (рис. 17). Таким образом,

$$T_{\text{кв}} = \frac{\lambda}{v} = \frac{h}{2(E - V_0)}; \quad \omega_{\text{кв}} = \frac{4\pi(E - V_0)}{h} \quad (158)$$

Выделяя из v -уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

временной множитель в виде $\cos \omega_{\text{кв}} t$, получим уравнение для пространственной части волновой функции ψ :

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{\omega_{\text{кв}}^2}{v^2} \psi(x) = 0,$$

по $v^2 = \frac{2}{m} (E - V_0)$, поэтому

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V_0) \psi(x) = 0. \quad (159)$$

По форме это будет обычное уравнение Шредингера. Различие будет в граничных условиях. В отличие от уравнения Шредингера здесь $\psi(x)$ на границе ямы должно равняться нулю и за пределы ямы не уходит. Решение уравнения будет

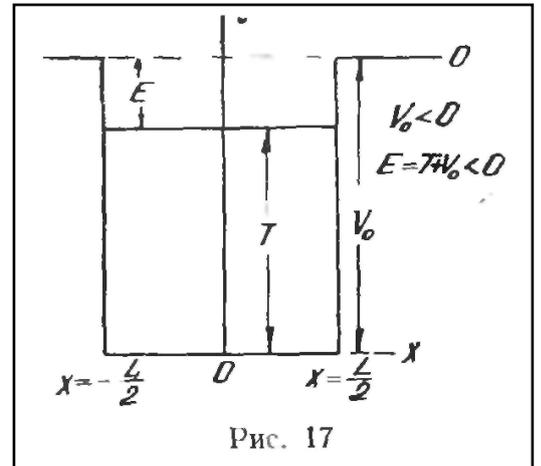
$$\psi(x) = A \cos \left[\frac{2\pi \sqrt{2m}}{h} \sqrt{E - V_0} x \right] \quad (160)$$

Применяя граничные условия

$$\psi \left(x = \frac{L}{2} \right) = \psi \left(x = -\frac{L}{2} \right) = 0,$$

получим требование

$$\frac{2\pi \sqrt{2m}}{h} \sqrt{E - V_0} \cdot \frac{L}{2} = n \frac{\pi}{2}, \quad (161)$$



откуда

$$E - V_0 = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (162)$$

Такое квантование энергии обычная квантовая механика дает только для ямы с идеально "твердыми" стенками, что соответствует бесконечно глубокой яме. В нашем случае такие твердые стенки получаются и при конечной глубине потенциальной ямы (рис. 18).

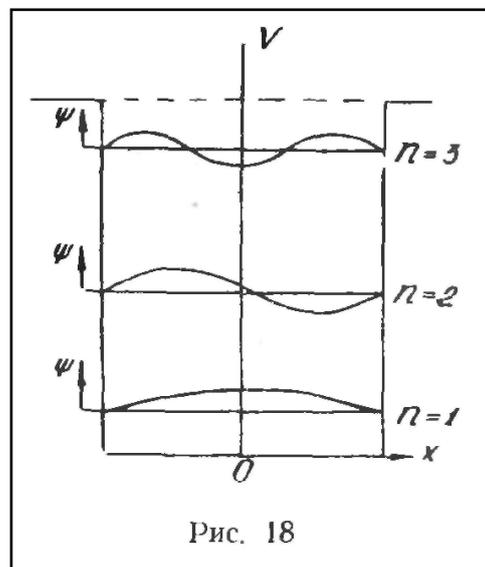


Рис. 18

§ 3. Частица в сферической яме без сил.

Эта задача является более близким к реальности обобщением предыдущей задачи. ν -уравнение для этого случая записывается в сферической системе координат

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (163)$$

Отделяем временной множитель обычным способом, полагая $\psi = \psi(r)\psi(t)$ и $\psi(t) = \cos \omega_{\text{кв}} t$. Квантовая частота будет опять

$$\omega_{\text{кв}} = \frac{2\pi m v^2}{h} = \frac{4\pi(E - V_0)}{h}. \quad (164)$$

Для пространственной части функции ψ получим уравнение

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V_0) \psi(r) = 0. \quad (165)$$

Полагая $u = r\psi(r)$, для функции u получим уравнение, рассмотренное в предыдущем параграфе типа

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \alpha^2 u = 0, \quad \alpha^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V_0). \quad (166)$$

Решение его

$$u = A \sin \alpha r + B \cos \alpha r.$$

Таким образом,

$$\psi = \frac{A}{r} \sin \alpha r + \frac{B}{r} \cos \alpha r. \quad (167)$$

При $r = R$ имеем $\psi(R) = 0$, т. е.

$$\frac{A}{R} \sin \alpha R + \frac{B}{R} \cos \alpha R = 0.$$

При $r=0$ значение $\psi(r)$ должно быть конечным, так как нет центрального тела (рис. 19). Отсюда $B = 0$ и

$$\psi = \frac{A}{r} \sin \alpha r. \quad (168)$$

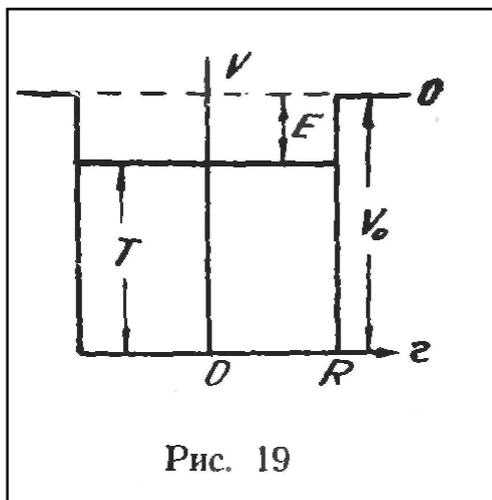


Рис. 19

В этом случае условие $\psi = 0$ при $r = R$ дает квантование энергии частицы

$$\sin \alpha R = 0; \alpha R = n\pi;$$

$$E - V_0 = \frac{n^2 \hbar^2}{8mR^2}. \quad (169)$$

§ 4. Угловая яма.

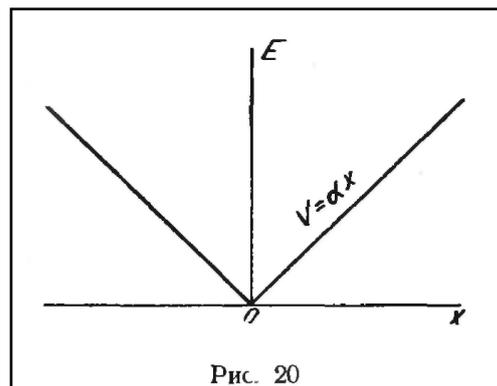
Возьмем потенциал, описываемый функцией

$$V = \begin{cases} \alpha x & | x > 0 \\ -\alpha x & | x < 0 \end{cases} \quad (\text{рис. 20}).$$

Определяем средние значения скорости v и длины волны де Бройля λ

$$\bar{v} = \int_0^{x_{\text{кр}}} \sqrt{\frac{2}{m}(E - \alpha x)} dx = \frac{2}{3} \frac{E}{\alpha} \sqrt{\frac{2E}{m}},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{h}{m} \int_0^{x_{\text{кр}}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \alpha x)}} = \frac{h}{\alpha} \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (170)$$



Квантовая частота будет

$$\bar{\nu} = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{2}{3} \frac{E}{h} \quad \text{или} \quad \omega_{\text{кв}} = \frac{4}{3} \pi \frac{E}{h}. \quad (180)$$

Волновое уравнение для пространственной части ψ -функции

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi(x) = 0$$

будет иметь форму

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m E^2}{9\hbar^2 (E - \alpha x)} \psi = 0. \quad (181)$$

Заменяя $\frac{\alpha x}{E} = \xi$ и затем $z = 1 - \xi$, получим уравнение

$$z \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \frac{8\pi^2 m E^3}{9\hbar^2 \alpha^2} \psi = 0, \quad (182)$$

являющееся частным случаем уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + axy' + (bx^m + c)y = 0$$

при

$$a = 0, \quad c = 0, \quad m = 1, \quad b = \frac{8\pi^2 m E^3}{9\hbar^2 \alpha^2}.$$

Решение уравнения будет

$$\psi = z^{\frac{1}{2}} Z_1 \left(2\sqrt{b} z^{\frac{1}{2}} \right) = (1 - \xi)^{\frac{1}{2}} Z_1 \left[2\sqrt{b} (1 - \xi)^{\frac{1}{2}} \right] =$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha x}{E} \right)^{\frac{1}{2}} Z_1 \left[2\sqrt{b} \left(1 - \frac{\alpha x}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (183)$$

Граничное условие на краю ямы удовлетворяется при любом α , отбор уровней производится из условий сшивания при $x = 0$, когда в силу

симметрии ямы должно быть или $\psi_1^1 = \psi_2^1 = 0$ или $\psi_1^1 = \psi_2^1, \psi_1 = \psi_2 = 0$, другими словами, при $x = 0$ должны быть или пучность или узел стоячей ψ -волны (рис. 21). Производная ψ' выражается довольно просто

$$\frac{d\psi}{dx} = -\sqrt{b} \frac{\alpha}{E} Z_0. \quad (184)$$

При $x=0 \psi'=0$, если $Z_0(2\sqrt{b})=0$. Подробнее

$$2 \sqrt{\frac{8\pi^2 m E^3}{9h^2 \alpha^2}} = z_{0,m} - \text{корень бесселевой}$$

функции Z_0 . Отсюда значения энергии нечетных уровней

$$E_{m=2n+1} = \sqrt[3]{\frac{(z_{0,m})^2 9h^2 \alpha^2}{32\pi^2 m}}. \quad (185)$$

При $x=0 \psi=0$, если $Z_1(2\sqrt{b})=0$. Отсюда

$$2 \sqrt{\frac{8\pi^2 m E^3}{9h^2 \alpha^2}} = z_{1,m} - \text{корень бесселевой}$$

функции Z_1 и значения энергии четных уровней

$$E_{m=2n} = \sqrt[3]{\frac{(z_{1,m})^2 9h^2 \alpha^2}{32\pi^2 m}}. \quad (186)$$

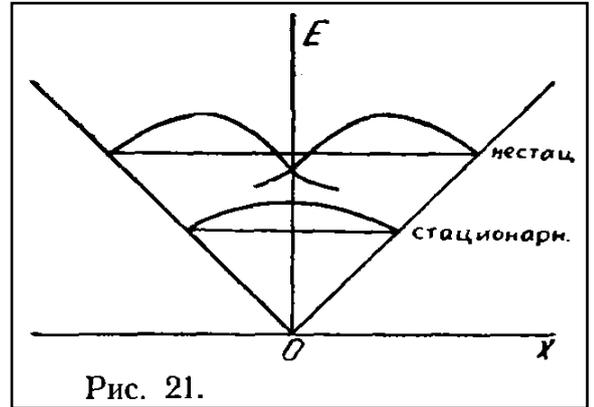


Рис. 21.

§ 5. Гармонический осциллятор.

Энергия системы из двух частиц, взаимодействующих между собой вдоль прямой $A-A$ (рис. 22) (максимальное расхождение частиц — $2r_{\max}$, минимальное — $2r_{\min}$) будет

$$E = \frac{m_0 \dot{r}^2}{2} + \frac{m_0 \dot{r}^2}{2} + V(2r). \quad (187)$$

Если обозначить $2r = x$, то $E = \frac{m_0 \dot{x}^2}{4} + V(x)$.

Пусть при $x = x_e$ потенциальная функция $V(x)$ имеет минимум $(\partial V / \partial x)_{x_e} = 0$. Если $x - x_e$ — отклонение от этой точки, то потенциальную функцию $V(x - x_e)$ можно представить в виде ряда

$$V(x - x_e) = V(x_e) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_e} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_e} (x - x_e)^2,$$

тогда

$$E = \frac{m_0}{2} \cdot \frac{\dot{z}^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_e} \cdot z^2$$

или

$$E = \frac{mz^2}{2} + \frac{\kappa z^2}{2}, \quad (188)$$

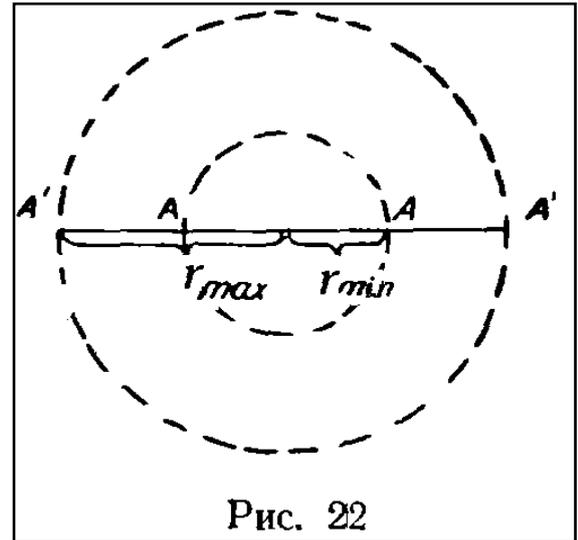


Рис. 22

где $m_2/2 = m$ - приведенная масса, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_e} = \kappa$.

По соображениям, о которых речь будет дальше, волновое ν -уравнение нужно писать в сферической системе координат

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Для пространственной части получим

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi(r) = 0. \quad (189)$$

Полагая $\psi = u/r$, имеем

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\omega^2}{v^2} u = 0. \quad (190)$$

Так как $r = \frac{x}{2} = \frac{z + x_e}{2}$, $\dot{r} = \frac{\dot{z}}{2}$, то

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\omega^2}{z^2} u = 0. \quad (191)$$

Квантовая частота ω определяется по средним значениям ν и λ : $\omega = \nu/\lambda$. Так

как $z = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{\kappa z^2}{2} \right)}$, $z_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{\kappa}}$,
то

$$\bar{z} = \int_0^{z_{\max}} \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{\kappa z^2}{2} \right)} dz = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2E}{m}},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{h}{m} \int_0^{z_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{\kappa z^2}{2} \right)}} = \frac{h\pi}{2m \sqrt{\frac{2E}{m}}}$$

и

$$\omega_{\text{кв}} = \frac{2\pi E}{h}. \quad (192)$$

Окончательно ν -уравнение получит вид

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{2\pi^2 m E^2}{h^2 \left(E - \frac{\kappa z^2}{2} \right)} u = 0. \quad (193)$$

Обозначив $\frac{\kappa z^2}{2E} = \xi^2$, приведем уравнение к виду

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{4\pi^2 m E^2}{h^2 \kappa} u = 0 \quad (194)$$

или

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \alpha^2 u = 0; \quad \alpha^2 = \frac{4\pi^2 m E^2}{h^2 \kappa}. \quad (195)$$

Положим решение в виде

$$u = (1 - \xi^2) \omega(\xi), \quad (196)$$

чтобы автоматически удовлетворить требованию обращения в нуль функции u на границе ямы при $\xi = 1$. Функцию ω берем в виде ряда

$$\omega(\xi) = \sum_i a_i \xi^i. \quad (197)$$

Рекуррентная формула для коэффициентов ряда будет

$$a_{\nu+2} = - \frac{(\alpha^2 - 2) - \nu(\nu - 1) - 4\nu}{(\nu + 2)(\nu + 1)} a_{\nu}. \quad (198)$$

Поскольку все коэффициенты выразятся через α_0 и α_1 , мы можем получить, вообще говоря, неограниченное число функций, которые будут удовлетворять граничному условию при $\xi = 1$. Однако только некоторые из них будут решениями, имеющими физический смысл, ψ -функции должны изображать стоячие волны, с узлами и пучностями, расположенными вполне определенным образом вдоль оси (это требование будет расшифровано в § 7 этой главы и в главе 5). В нашем случае в силу симметрии потенциальной ямы при $\xi = 0$ может располагаться или узел или пучность стоячей волны. Этому требованию будут удовлетворять только те решения, для которых коэффициент $\alpha^2 = n(n+1)$, где $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Эти решения будут представлять

собой $\omega = u_n^{(1)} = \frac{du_n}{d\xi}$ - производные от функций Лежандра. Таким образом, первые три собственные функции осциллятора будут

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \left(1 - \frac{\kappa}{2E_1} z^2 \right), \\ u_2 &= A_2 \left(1 - \frac{\kappa}{2E_2} z^2 \right) \cdot 3 \sqrt{\frac{\kappa}{2E_2}} \cdot z, \\ u_3 &= A_3 \left(1 - \frac{\kappa}{2E_3} z^2 \right) \left(\frac{15}{2} \cdot \frac{\kappa}{2E_3} z^2 - \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (199)$$

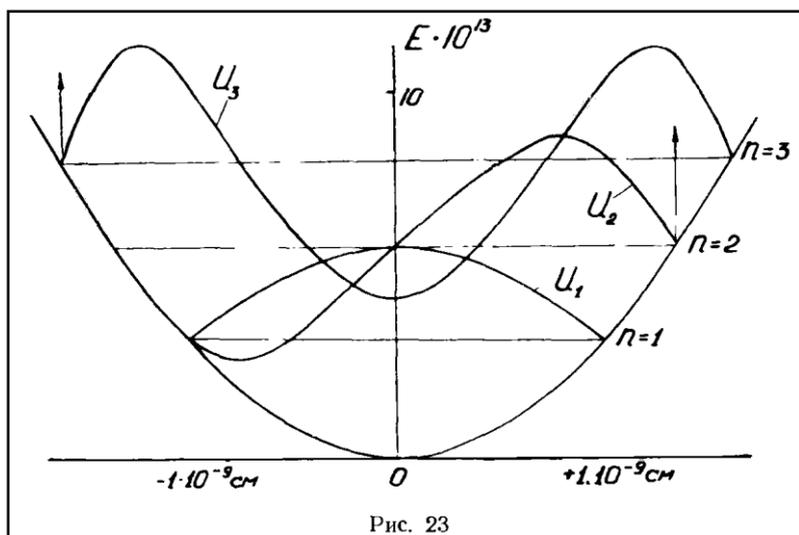


Рис. 23

Эти функции показаны на рис. 23. Вычисления сделаны для $\kappa = 5 \cdot 10^5$ и $m = 10^{-23}$ при амплитудах, равных единице.

Полное решение ν -уравнения как функции r и t запишется

$$\psi = \frac{u(2(r - r_e))}{r} \cdot \cos \omega t \quad (200)$$

($\psi(r)$ до $r = 0$ не доходит!)

Условие $\alpha^2 = n(n+1)$ дает квантование энергии осциллятора

$$E_n = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sqrt{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (201)$$

Обычная квантовая механика дает для энергетических уровней осциллятора

$$E_n = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Сравнение энергетических уровней по обычной квантовой механике и по автоколебательной для гармонического осциллятора дается в табл. 3.

Поскольку энергия квантов определяется разностью энергий соседних уровней, то практически особой разности в величине квантов нет. Имеющиеся небольшие разности в величине энергетических уровней связаны с неточностью самого закона сил для гармонического осциллятора. Этот вопрос будет подробно обсужден позднее.

Таблица 3

№ уровня	Энергия по обычн. кв. механике	Разность уровней в $\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$	Энергия по сопрот. кв. механике	Разность уров- ней в $\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$
0	$\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot 0,5$	$\Delta=1$	—	
1	$\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot 1,5$	$\Delta=1$	$\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot 1,414$	$\Delta=1,035$
2	$\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot 2,5$	$\Delta=1$	$\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot 2,449$	$\Delta=1,015$
3	$\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot 3,5$	$\Delta=1$	$\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot 3,464$	$\Delta=1,008$
4	$\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot 4,5$		$\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot 4,472$	

§ 6. S-состояния атома водорода

После рассмотрения задач с упрощенными законами сил мы рассмотрим сейчас задачу с точным законом сил - задачу об атоме водорода. Для простоты ограничимся пока рассмотрением только s-состояний атома водорода, ν -уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

После выделения временного множителя в обычном виде $Z = \cos \omega t$, для

пространственной части волновой функции получим уравнение

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{\omega^2}{v^2} R = 0. \quad (202)$$

Квантовую частоту находим по усредненным \bar{v} и $\bar{\lambda}$ (в качестве классического движения электрона берем падение его по радиусу на протон):

$$\bar{v} = \bar{r} = \int_0^{r_{\max}} \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{e^2}{r} \right)} dr = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{2E}{m}} ;$$

$$\bar{\lambda} = \frac{h}{m} \int_0^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{e^2}{r} \right)}} = \frac{\pi}{2} \frac{h}{\sqrt{-2mE}} .$$

Здесь $r_{\max} = -\frac{e^2}{E}$. Квантовая частота будет равна

$$\omega_{\text{кв}} = \frac{2\pi\bar{v}}{\bar{\lambda}} = -\frac{4\pi E}{h} . \quad (203)$$

Теперь уравнение для пространственной части волновой функции получится в виде

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{8\pi^2 m E^2}{h^2 \left(E + \frac{e^2}{r} \right)} R = 0. \quad (204)$$

Введем обозначения $\frac{8\pi^2 m E}{h^2} = -A (A > 0)$ и $\frac{e^2}{E} = -B$ ($B > 0$). Тогда

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{A}{1 - \frac{B}{r}} R = 0. \quad (205)$$

В случае атома водорода из-за несимметричного закона сил ($V(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$) при $r = 0$ узла стоячей волны быть не может. Поэтому картина стоячих волн будет напоминать стоячие волны в открытой с одного конца воздушной трубе. Однако граничное условие на "открытом" конце, т. е. при $r = 0$ просто задать нельзя опять таки из-за кулоновского закона сил. Попробуем упростить уравнение, выделив из функции R "сферический множитель $1/r$ ", т.е. положим $x=r/B$ и $R=y/x$. Тогда уравнение для y будет иметь форму

$$(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda xy = 0, \quad (206)$$

здесь $\lambda = AB^2$. Это уравнение можно еще упростить, выделив множитель $e^{\sqrt{\lambda}x}$. Полагаем $y = e^{\sqrt{\lambda}x} \cdot \eta(\xi)$, где $\xi = 1-x$.

Тогда

$$\xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - 2\sqrt{\lambda} \xi \frac{d\eta}{d\xi} + \lambda \eta = 0. \quad (207)$$

Решение этого уравнения можно искать в виде ряда $\eta = \sum a_\nu \xi^\nu$. Коэффициенты ряда будут связаны рекуррентной формулой

$$a_{\nu+1} = \frac{2\sqrt{\lambda - \nu - 1}}{\nu(\nu + 1)} a_\nu. \quad (208)$$

Как мы увидим далее, чтобы электрон мог двигаться по радиусу r вперед и назад с определенной закономерностью, связанной с периодом колебаний ψ -функции во времени, расположение узлов и пучностей функции R по радиусу должно быть также вполне определенным. Простота рекуррентной формулы подсказывает в качестве второго граничного условия требование: η "есть многочлен". Такой отбор функций ведет прежде всего к правильному квантованию уровней энергии атома водорода. Действительно, если положить $a_{n+1} = 0$, то

$$\lambda = 4n^2. \quad (209)$$

Так как $\lambda = AB^2 = -\frac{8\pi^2 me^4}{h^2 E}$, то из этого соотношения получается

$$E_n = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, 4... \quad (210)$$

Рассмотрение задачи о вращательных состояниях атома водорода также подтверждает справедливость такого выбора решений для атома водорода. На рис. 24 представлены функции $y = e^{\sqrt{\lambda} x} \cdot \eta_1(\xi)$ для $\lambda = 4$ ($n = 1$), $\lambda = 16$ ($n = 2$). Решения без требования обрыва ряда при $\lambda = 1, \lambda = 3, \lambda = 5, \lambda = 9, \lambda = 14$ изображены на том же рисунке пунктирными линиями. При значениях, близких к "правильным" (т. е. получившимся из условий обрыва ряда), должны получиться энергии, близкие к квантованным и в то же время

удовлетворяющие условиям устойчивости, благодаря чему уровни энергии атома будут иметь конечную ширину. Полные радиальные функции будут иметь вид

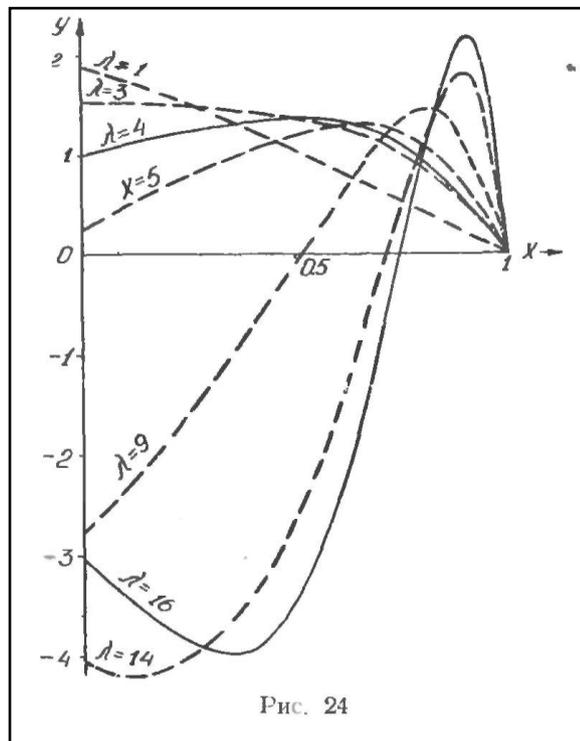


Рис. 24

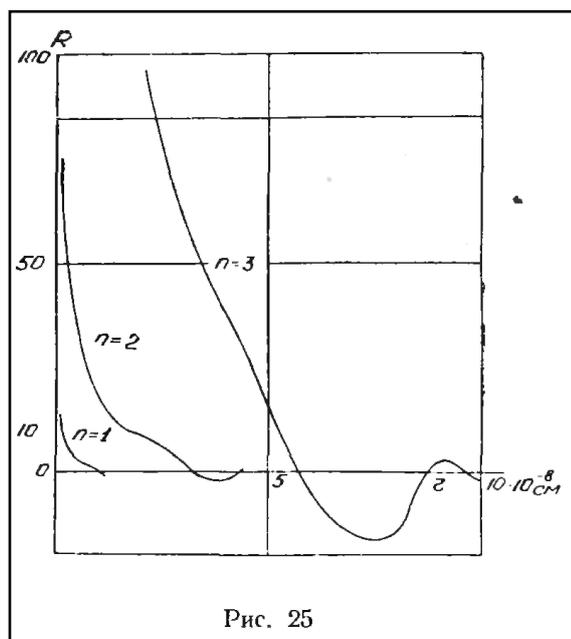


Рис. 25

$$R_n = - \frac{e^2}{E_n \cdot r} e^{-\frac{2nE_n}{e^2} \cdot r} \cdot \sum_{m=1}^n a_m \left(1 + \frac{rE_n}{e^2} \right)^m. \quad (211)$$

Для получения полной волновой функции нужно эту функцию умножить на временную функцию $\chi = \cos \frac{4\pi E_n}{h} t$.

Три радиальные функции R_n для $n = 1, 2, 3$ приведены на рис. 25.

§ 7. Интерпретация собственных функций ν -уравнения.

Как видно из приведенных задач, ψ -функция ν -уравнения кардинальным образом отличается от ψ -функций u -уравнения (уравнения Шредингера):

Таблица 4

u -уравнение	ν -уравнение
1. ψ -функция должна быть $=0$ на бесконечности.	1. ψ -функция обрывается на классической границе потенциальной ямы.
2. ψ -функция должна быть конечной во всех других точках.	2. ψ -функция может быть в некоторых точках равна бесконечности

Отсюда ясно, что вероятностная интерпретация для решений ν -уравнения не годится. По виду ψ -функций напрашивается истолкование их как потенциальных функций, зависящих от времени, определяющих какие-то силы, действующие на частицы.

Обычная квантовая механика не пытается объяснить, с чем физически связана разная вероятность нахождения частицы в разных точках пространства. Однако ясно, что такая физическая причина должна существовать. Прежде всего бросается в глаза дискретность энергетических уровней квантовых систем. Это обстоятельство заставляет вспомнить о свойствах автоколебательных систем, которые также могут существовать только в определенных энергетических состояниях. Можно представить себе, что частица при своем движении в свободном виде или в составе какой-либо системы частиц непрерывно взаимодействует с окружающей средой (по-видимому, только с ближней зоной этой среды), то отдавая свою энергию этой среде, то получая ее вновь от среды. Другими словами, частица всегда излучает или поглощает энергию, но только при определенных условиях это излучение может оторваться от системы в виде, например, кванта света. К такой мысли, кроме автора [1, 2], пришли также французские теоретики—сотрудники Л. де Бройля [9]. Подробное исследование автоколебательных движений частиц в атомных системах будет дано дальше. Сейчас мы дадим пока только общую характеристику движения частиц в этих системах.

Движущиеся по классическим траекториям частицы возбуждают внутри некоторой области, определяемой силами, удерживающими систему, стоячие волны, описываемые ψ -функцией ν -уравнения. Эти волны, в свою очередь, действуют на частицы, заставляя их совершать дополнительное квантовое движение в виде определенных колебаний, накладывающихся на классическое движение.

Даваемая ν -уравнением картина волн является, конечно, идеальной, сглаженной. На самом деле взаимодействие со средой не такое гладкое. Однако отклонение от идеальной картины в определенных условиях не является катастрофическим, и система остается устойчивой, саморегулирующейся. С этой точки зрения картина движения электрона в атоме водорода в s -состоянии вырисовывается в совершенно новом виде. Известно, что Н. Бор создал свою механику устойчивых орбит как раз для того, чтобы объяснить, почему электрон не падает на ядро. Однако, как оказалось, основное состояние атома водорода является невращательным, т. е. теория Бора не решила эту проблему. Волновая механика формально дает этот результат для основного состояния атома водорода, однако на вопрос, как же движется электрон в основном состоянии атома водорода, принципиально отказывается отвечать, ссылаясь на "природу" вещей, которая такова, что нам "не дано" этого знать.

С точки зрения автоколебательной квантовой механики получается довольно наглядная картина: электрон в атоме водорода в s -состоянии движется вдоль радиуса. "Падая" на протон, электрон возбуждает сферическую волну (описываемую решением ν -уравнения), которая по принципу обратной связи начинает действовать на электрон с силой, направленной против этого движения. Электрон сначала тормозится, потом под действием возбужденной им волны отбрасывается обратно до положения крайнего отклонения, определяемого его энергией ($r_{\max} = -e^2/E$). К этому моменту исчезает и волна. После этого начинается все сначала. Поскольку около протона электрическое поле его достигает громадных напряженностей (10^9 вольт на сантиметр и выше), существование таких "вязких" волн вполне возможно. Эти волны по своему характеру похожи на электромагнитные волны (см. § 5, гл. II), хотя они, вообще говоря, связаны не с зарядом, а с массой частицы. Это сходство в дальнейшем найдет еще одно подтверждение. Такие волны в нормальной атомной системе существуют в ограниченном пространстве и не излучаются вовне. Только при определенных условиях такое излучение возможно. Процесс излучения является процессом явно нестационарным и требует особого рассмотрения. В связи с общим характером автоколебательной квантовой механики необходимо рассмотрение конкретного механизма этого перехода. Это требует большой работы по подбору модели такого перехода. В принципе с какой-то степенью точности мы такой механизм можем найти. Это обстоятельство особенно отличает механику ν -уравнения от обычной

квантовой механики, которая как раз о механике-то и отказывается говорить, а рассматривает только формальную связь между определенным начальным состоянием системы и ее конечным состоянием.

Итак, основные положения относительно интерпретации решений ψ -уравнения можно сформулировать следующим образом:

1. Структура распределения вероятности пребывания электрона около ядра связана с физической структурой среды около ядра, т. е. с наличием и в стационарном состоянии меняющегося во времени распределения сил, действующих на электрон и возбуждаемых этим же электроном.
2. В стационарном состоянии атомной системы необходимо наличие стоячих квантовых волн.
3. Эти квантовые волны возбуждаются движущимися частицами и, в свою очередь, действуют на частицы, образуя вместе с ними автоколебательную систему.

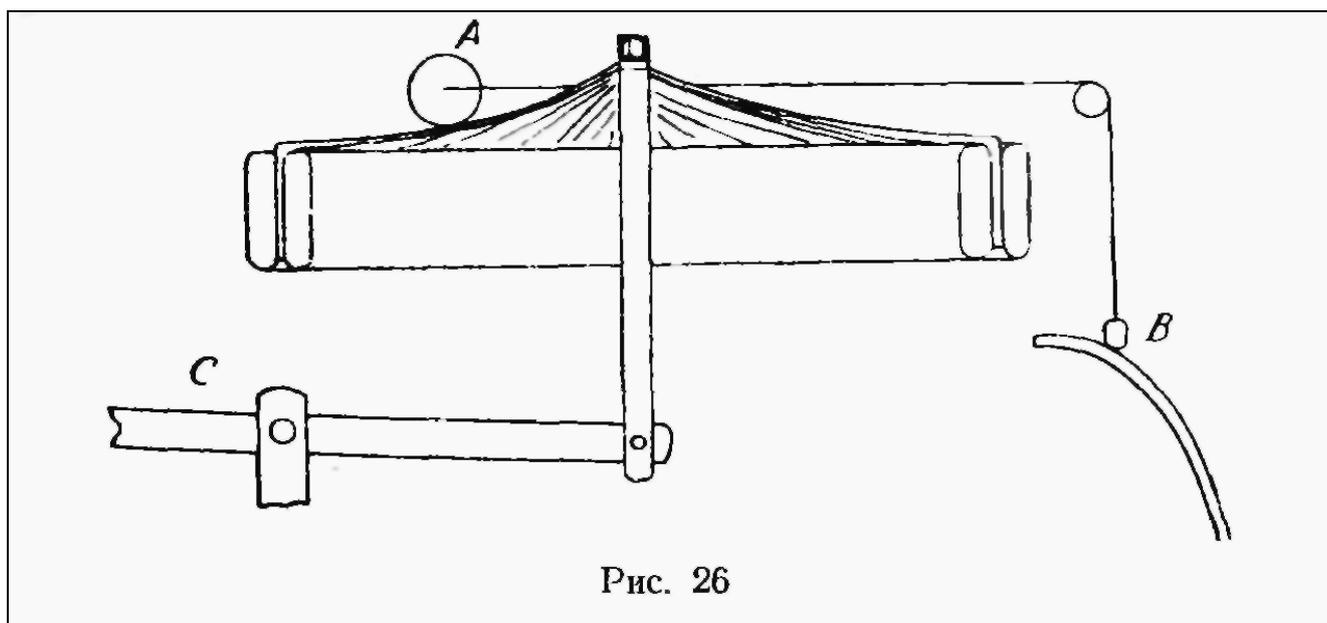


Рис. 26

s -состояние атома водорода (без учета спиновых и других эффектов), как самое простое состояние в математическом и физическом смысле, может быть смоделировано механически. Такая модель представлена на рис. 26. ψ -волна изображается резиновой мембраной, натянутой на пальцы. Колесико A , изображающее электрон, находится под действием силы, притягивающей его к центру мембраны. Эта сила моделируется весом груза B , скользящего по изогнутой пластине, чтобы получить для силы подобие закона Кулона. Чтобы "электрон" не падал на центр сил, мембрана должна по мере продвижения "электрона" подниматься, создавая тем самым противодействующую силу, отбрасывающую "электрон" в конце концов в крайнее наружное положение. Затем мембрана опускается, и "электрон" вновь начинает "падать" к центру притяжения. Колебания мембраны создаются рычагом C . Если мембрана будет совершать колебания с определенной частотой, то "электрон" будет совершать непрерывные колебания вдоль радиуса, не падая на центр сил (на "протон"). Модель,

конечно, можно полностью автоматизировать, однако в отличие от "натурального" атома такая модель будет потреблять энергию даже в "стационарном" состоянии.

§ 8. Проблема дейтерона.

Поскольку точный закон ядерных сил не известен, для решения задачи о дейтероне приходится пробовать различные потенциальные функции, дающие достаточно малый радиус действия сил. Были исследованы следующие модели потенциалов [10]:

$$\begin{aligned}
 & V(r) = -V_0, \quad r < r_0, \\
 \text{прямоугольная яма} \quad & V(r) = 0, \quad r > r_0, \\
 \text{потенциал Гаусса} \quad & V(r) = -V_0 e^{-\mu^2 r^2}, \\
 \text{экспоненциальная яма} \quad & V(r) = -V_0 e^{-\mu r}, \\
 \text{потенциал Юкавы} \quad & V(r) = -V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}, \\
 \text{потенциал Хюльтена} \quad & V(r) = -V_0 \frac{e^{-\mu r}}{1 - e^{-\mu r}}.
 \end{aligned} \tag{212}$$

Мы видели выше, что для приближенных законов сил квантование энергии, даваемое ν -уравнением, несколько отлично от квантования по уравнению Шредингера. Для точного закона сил, каковым является закон Кулона, квантование по обеим механикам одинаково. Позволительно предположить, что можно отобрать точный закон ядерных сил по этому признаку, т. е. для этого закона квантование энергии системы должно быть одинаково по обеим механикам. Таким законом, как мы увидим дальше, является закон Хюльтена.

Считаем оба нуклона имеющими одинаковую массу m . Начало координат помещаем в центр тяжести обоих нуклонов. ν -уравнение пишем в сферической системе координат

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

После выделения временного множителя $\chi(t) = \cos \omega t$ получим уравнение для радиальной функции

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{\omega^2}{v^2} R = 0. \tag{213}$$

Квантовую частоту ω находим по усредненным величинам $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$ и $\bar{\lambda}$.

$$\bar{v} = \int_0^{r_{\text{кр}}} \sqrt{\frac{1}{m} \left(E + V_0 \frac{e^{-\mu^2 r}}{1 - e^{-\mu^2 r}} \right)} dr;$$

$$\bar{\lambda} = \frac{h}{2m} \int_0^{r_{\text{кр}}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{m} \left(E + V_0 \frac{e^{-\mu 2r}}{1 - e^{-\mu 2r}} \right)}}$$

Здесь

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} \dot{r}^2 - V_0 \frac{e^{-\mu 2r}}{1 - e^{-\mu 2r}};$$

$$E = -V_0 \frac{e^{-\mu 2r_{\text{кр}}}}{1 - e^{-\mu 2r_{\text{кр}}}}.$$

Вычисления дают

$$\omega_{\text{кв}} = \frac{2\pi\bar{\nu}}{\bar{\lambda}} = \frac{4\pi}{h} V_0 \sqrt{-\frac{E}{V_0}} \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}}. \quad (214)$$

Таким образом, уравнение для радиальной функции получит вид

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{16\pi^2 V_0 E \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) m}{h^2 \left(E + V_0 \frac{e^{-\mu 2r}}{1 - e^{-\mu 2r}} \right)} R = 0. \quad (215)$$

Если в качестве независимой переменной взять расстояние между нуклонами $x = 2r$, то уравнение запишется как

$$\frac{d^2 R^+}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dR^+}{dx} - \frac{4\pi^2 m V_0 E \left(1 - \frac{E}{V_0} \right)}{h^2 \left(E + V_0 \frac{e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu x}} \right)} R^+ = 0. \quad (216)$$

Для решения уравнения делаем замену $R^+ = \frac{U}{x}$, тогда

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\varepsilon E'^2}{E + V_0 \frac{e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu x}}} U = 0; \quad \varepsilon = \frac{4\pi^2 m}{h^2}; \quad (217)$$

$$E'^2 = -V_0 E \left(1 - \frac{E}{V_0} \right).$$

Далее полагаем $e^{-\mu x} = y [e^{-\mu x_{\text{кр}}} \leq y \leq 1]$, в этом случае

$$\frac{d^2 U^+}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dU^+}{dy} + \frac{g(1-y)U^+}{(y-f)y^2} = 0. \quad (218)$$

Здесь обозначено

$$g = \frac{\varepsilon E'^2}{\mu^2 E \left(\frac{V_0}{E} - 1 \right)} = -\frac{\varepsilon E}{\mu^2};$$

$$f = -\frac{E}{V_0 - E}.$$

Делаем еще замену $y - f = z$, тогда $[1 - f \gg z \gg y_{кр} - f]$

$$\frac{d^2 u^*}{dz^2} + \frac{1}{z+f} \frac{du^*}{dz} + \frac{g(1-f-z)}{z(z+f)^2} u^* = 0. \quad (219)$$

Далее полагаем $u^* = V \cdot z$

$$(z+f)^2 \cdot z \cdot \frac{d^2 V}{dz^2} + [2(z+f)^2 + z(z+f)] \frac{dV}{dz} + [g(1-z-f) + (f+z)] V = 0. \quad (220)$$

Еще одна замена $\frac{z}{f} + 1 = \xi$ дает уравнение

$$\xi^2 (\xi - 1) \frac{d^2 V}{d\xi^2} + [3\xi^2 - \xi] \frac{dV}{d\xi} + \left[(1-g)\xi + \frac{g}{f} \right] V = 0. \quad (221)$$

Это уравнение принадлежит к известному типу [11]

$$x^2 (x-1) y'' + (ax+b) xy' + (cx+d) y = 0.$$

Значения коэффициентов: $a = 3$, $b = 1$, $c = 1 - g$, $d = g/f$.

Определив постоянную κ из уравнения

$$\kappa^2 - (b+1)\kappa = d, \quad \kappa = \pm \sqrt{g/f}, \quad (222)$$

можно ввести функцию $V = \xi^\kappa \omega(\xi)$. Уравнение для этой функции

$$\xi (\xi - 1) \omega'' + [(3 \pm 2\sqrt{g/f})\xi - 1 \mp 2\sqrt{g/f}] \omega' + [(1-g) \pm \sqrt{g/f} (2 \pm \sqrt{g/f})] \omega = 0. \quad (223)$$

будет гипергеометрическим уравнением типа

$$x(x-1) y'' + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma] y' + \alpha\beta y = 0,$$

для коэффициентов получим уравнения:

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 \pm 2\sqrt{g/f}, \\ \alpha + \beta + 1 &= 3 \pm 2\sqrt{g/f}, \\ \alpha\beta &= 1 - g \pm 2\sqrt{g/f} + \frac{g}{f}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\beta = 1 \pm \sqrt{g/f} \pm \sqrt{g}; \quad \alpha = 1 \pm \sqrt{g/f} \mp \sqrt{g}. \quad (224)$$

Решение уравнения будет представлять собой ряд

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = 1 + \frac{\alpha, \beta}{\gamma \cdot 1} \cdot \xi + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 1 \cdot 2} \xi^2 + \dots \quad (225)$$

Ряд может обрываться на том члене, в котором параметр α будет равен нулю или целому отрицательному числу. Например, если $\alpha = 0$, то $F = 1$.

Если $\alpha = -1$, то $F = 1 - \frac{\beta}{\gamma} \xi$.

Эти условия дают квантование энергии. Действительно, пусть $\alpha = 0$. Из определения α получим

$$1 \pm \sqrt{g/f} = \pm \sqrt{g}. \quad (226)$$

Так как $g/f = \frac{\varepsilon}{\rho^2} (V_0 - E)$; $g = -\frac{\varepsilon E}{\rho^2}$, то

$$1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu^2}(V_0 - E)} = \pm \sqrt{-\frac{\varepsilon E}{\mu^2}} \quad (227)$$

Поскольку $\varepsilon = \frac{4\pi^2 m}{h^2}$, то для соответствующего энергетического уровня будем иметь

$$-E_0 = \frac{\pi^2 m V_0^2}{h^2 \mu^2} - \frac{V_0}{2} + \frac{\mu^2 h^2}{16 \pi^2 m} \quad (228)$$

Для случая $\alpha = -1$ получим

$$\alpha = 1 \pm \sqrt{g/f} \mp \sqrt{g} = -1 \quad (229)$$

или

$$\frac{4g^2}{f} = 16 - 8g \left(\frac{1}{f} + 1 \right) + g^2 \left(\frac{1}{f} + 1 \right)^2.$$

Подставляя значения g и f , имеем

$$\frac{4\varepsilon^2 E}{\mu^4} (E - V_0) = 16 + 8 \frac{\varepsilon}{\mu^2} (2E - V_0) + \frac{\varepsilon^2}{\mu^4} (2E - V_0)^2.$$

После подстановки значения $\varepsilon = \frac{4\pi^2 m}{h^2}$ получим значение Энергии

$$-E_1 = \frac{V_0^2 \pi^2 m}{4\mu^2 h^2} - \frac{V_0}{2} + \frac{\mu^2 h^2}{4\pi^2 m} \quad (230)$$

Таким же образом получим для $\alpha = -2$

$$-E_2 = \frac{V_0^2 \pi^2 m}{9\mu^2 h^2} - \frac{V_0}{2} + \frac{9}{16} \frac{\mu^2 h^2}{\pi^2 m} \quad (231)$$

и вообще для $\alpha = -n$

$$-E_n = \frac{V_0^2 \pi^2 m}{(n+1)^2 \mu^2 h^2} - \frac{V_0}{2} + \frac{(n+1)^2 \mu^2 h^2}{16 \pi^2 m}; \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (232)$$

Чем больше номер уровня n , тем выше уровень, тем меньше $|E_n|$.

Поскольку потенциальная функция Хюльтена определяется двумя параметрами, всегда можно подобрать их значения так, что n -й уровень сделается равным нулю, тогда из уравнения $-E_n = 0$ получится выражение одного параметра через другой

$$V_0 = \frac{(n+1)^2}{4} \frac{h^2 \mu^2}{\pi^2 m} \quad (233)$$

Так как у дейтерона должен существовать только один уровень, то уже уровень с $n = 1$ должен быть равен нулю.

В этом случае $V_0 = \frac{h^2 \mu^2}{\pi^2 m}$. Остающийся уровень $n = 0$ будет выражаться формулой

$$-E_0 = \frac{V_0^2 \pi^2 m}{h^2 \mu^2} - \frac{V_0}{2} + \frac{h^2 \mu^2}{16 \pi^2 m} \quad (234)$$

Подставляя указанное значение V_0 , получим

$$-E_0 = \frac{9}{16} \frac{h^2 \mu^2}{\pi^2 m} \quad (235)$$

Обычно связь между V_0 и μ выбирают таким образом, что энергия E_0 и "радиус" дейтерона подгоняются под опытные данные. В нашем случае критерием для выбора параметров V_0 и μ является возможность

существования автоколебательного движения частей дейтерона (нейтрона и протона) (см. гл. V).

Волновая функция R для дейтерона будет иметь вид

$$R(r) = \frac{\xi^{\kappa} \cdot \omega(\xi) \cdot z}{2r}. \quad (236)$$

Поскольку $\alpha = 0$, то $\omega(\xi) = 1$, и функция будет

$$R(r) = \left(\frac{e^{-\mu r}}{f}\right)^{\kappa} \left(\frac{e^{-\mu r} - f}{2r}\right). \quad (237)$$

Если вспомнить, что

$$f = -\frac{1}{\left(\frac{V_0}{E} - 1\right)} \quad \text{и} \quad E = -V_0 \frac{e^{-\mu r_{\text{кр}}}}{1 - e^{-\mu r_{\text{кр}}}}, \quad (238)$$

то будет видно, что на краю ямы при $r = r_{\text{кр}}$ функция R обращается в нуль.

Обычное уравнение Шредингера для дейтерона с потенциалом Хюльтена

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\frac{Em4\pi^2}{h^2} + V_0 \frac{e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu x}}\right) U = 0 \quad (239) \quad [12]$$

имеет решение в виде $U(x) = e^{-ikx} \cdot F(a, b, c, y)$, где

$$v_0 = \frac{V_0 m}{h^2} 4\pi^2,$$

$$\kappa^2 = \frac{4\pi^2}{h^2} Em, \quad a = \frac{i\kappa}{\mu} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{\kappa^2}\right)} \right],$$

$$b = \frac{i\kappa}{\mu} \left[1 + \sqrt{\left(1 - \left(\frac{V_0}{\kappa^2}\right)\right)^2} \right]; \quad c = 1 + \frac{2i\kappa}{\mu}.$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{n\mu} - n\mu \right).$$

Энергетические уровни определяются из соотношения $n = 1$ значение энергии определяется формулой

$$-E_1 = \frac{\alpha_1^2 h^2}{4\pi^2 m} = \frac{h^2}{16\pi^2 m} \left(\frac{v_0}{\mu} - \mu \right) = \frac{V_0^2 \pi^2 m}{h^2 \mu^2} - \frac{V_0}{2} + \frac{\mu^2 \cdot h^2}{16\pi^2 m}, \quad (240)$$

полностью совпадающей с выражением энергии для случая $\alpha = 0$ нашего уравнения.

Глава IV

КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ВРАЩЕНИЕМ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Задача о ротаторе. Векторные волновые функции.

Ротатор представляет из себя материальную точку массы m , движущуюся на заданном расстоянии от центра сил. Потенциальная энергия частицы при постоянном радиусе a постоянна, и мы можем положить ее равной нулю, ν -уравнение для такой точки будет после выделения временного множителя иметь вид

$$\frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0. \quad (241)$$

Производные по r отсутствуют из-за нашего условия рассматривать движение только при постоянном $r = a$, и квантовый потенциал, задаваемый ψ -функцией нашего уравнения, будет определен только на поверхности сферы радиуса a . Квантовая частота из-за постоянства скорости частицы определяется просто как

$$\omega_{\text{кв}} = 2\pi\nu = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi m v^2}{h} = \frac{4\pi E}{h}. \quad (242)$$

Так как $v^2 = 2E/m$, то

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{8\pi^2 m E}{h^2}. \quad (243)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{8\pi^2 I E}{h^2} \Psi = 0. \quad (244)$$

Здесь $I = ma^2$ —момент инерции относительно неподвижного центра. Уравнение представляет собой дифференциальное уравнение сферических функций. Оно имеет решения в виде стоячих волн при условии

$$\frac{8\pi^2 I E}{h^2} = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, 3... \quad (245)$$

решение находится методом разделения переменных. Полагаем

$$\Psi = \Theta(\theta) \Phi(\varphi).$$

Получается

$$\begin{aligned} \Phi &= \cos m \varphi, \quad \dots \\ \Theta &= P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}(x^2-1)^l}{dx^{l+m}}, \quad (246) \\ x &= \cos \theta, \quad -l \leq m \leq +l. \end{aligned}$$

Поскольку решения ν -уравнения мы толкуем как 4-мерную

потенциальную функцию (см. § 5, гл. II), то в системах с вращением наряду со скалярной Ψ -функцией нужно рассмотреть и векторную Ψ -функцию (которую обозначим через A). Оператор ΔA в сферической системе координат можно расписать как

$$\begin{aligned} (\Delta A)_r &= \Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \cdot A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ (\Delta A)_\theta &= \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ (\Delta A)_\varphi &= \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (247)$$

В данном случае для материальной точки, движущейся по окружности, можно положить, что имеется только одна составляющая векторной Ψ -функции A_φ , составляющие же A_r и A_θ равны нулю. Тогда из первого уравнения получится $\partial A_\varphi / \partial \varphi = 0$, так как $(\Delta A)_r = -\frac{\omega^2}{v^2} A_r$ и $A_r = A_\theta = 0$.

Для A_φ будем иметь уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{A_\varphi}{\sin^2 \theta} + \kappa^2 A_\varphi &= 0; \\ \left[\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} = 0, \kappa^2 = r^2 \frac{\omega^2}{v^2} \right]. \end{aligned} \quad (248)$$

Поскольку $\partial A_\varphi / \partial \varphi = 0$, то A_φ будет зависеть только от координаты θ . Полагая $\cos \theta = x$, получим

$$(x^2 - 1) A_\varphi'' + 2x A_\varphi' - \left(\kappa^2 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) A_\varphi = 0. \quad (249)$$

Делаем замену $A_\varphi = |x^2 - 1|^{\frac{1}{2}} u(x)$, тогда

$$(x^2 - 1) u'' + 4x u' + [2 - \kappa^2] u = 0.$$

Это уравнение типа

$$(x^2 - 1) y'' + 4xy' - (\nu + 2)(\nu - 1)y = 0$$

и решение его

$$u = u_l^{(1)}(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^l \cdot l!} \frac{d^{l+1}(x^2 - 1)^l}{dx^{l+1}}; \quad [\kappa^2 = l(l+1)]. \quad (250)$$

Как и для скалярной Ψ -функции

$$\kappa^2 = \frac{8\pi^2 IE}{h^2} = l(l+1).$$

Ясно, что если $l = 0$, то $u_0^0 = 1$, $u_0^1 = \partial u_0^0 / \partial x$ и, значит $u = u_0^1 = 0$. Таким образом, для систем с вращением кроме скалярного квантового потенциала в качестве решения ν -уравнения будет иметь место векторный квантовый потенциал. В обычной квантовой механике такой возможности нет.

§ 2. Частица с вращением в прямоугольной потенциальной яме.

Представим себе сферу с абсолютно упругими стенками, внутри которой летает также абсолютно упругая частица так, что траектория ее не проходит через центр сферы (рис. 27). Скорость частицы выразится формулой

$$v^2 = \frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (251)$$

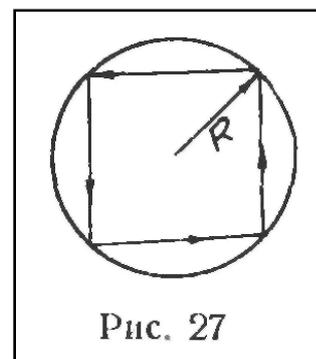


Рис. 27

Частица будет, таким образом, обладать вращательным моментом $M = mr^2\dot{\varphi}$. Ψ -волна будет теперь функцией не только координаты r , но и угловых координат φ и θ . v -уравнение позволяет произвести разделение переменных. Полностью такое разделение переменных проведено в следующем параграфе, мы сейчас сразу напишем уравнение для радиальной части функции Ψ

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0, \quad P_\varphi = \frac{h}{2\pi} \sqrt{l(l+1)}. \quad (252)$$

Сделав замену $R = y/r$, получим уравнение

$$y'' + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y = 0. \quad (253)$$

Заметим, что функция $f = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}$ при определенном значении r меняет знак

$$r_{f=0} = \frac{v}{\omega} \sqrt{l(l+1)}. \quad (254)$$

Уравнение (253) имеет стандартную форму уравнения

$$x^2 y'' - [cx^2 + p(p-1)] y = 0, \quad c = -\frac{\omega^2}{v^2}, \quad p = l+1,$$

поэтому сразу можем написать решение

$$y = \sqrt{r} \cdot Z_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega}{v} r \right). \quad (255)$$

Полное решение будет (! в (256) – замена l на J – (ред))

$$y = \sqrt{r} \left[C_1 J_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega}{v} r \right) + C_2 N_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega}{v} r \right) \right]. \quad (256)$$

Функции $J_{l+\frac{1}{2}}$, $N_{l+\frac{1}{2}}$ выражаются через элементарные функции [13]

$$\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z, \\
J_{-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos z, \\
J_{\frac{3}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right), \\
J_{-\frac{3}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(-\sin z - \frac{\cos z}{z} \right), \\
J_{\frac{5}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \left(\frac{3}{z^2} - 1 \right) \sin z - \frac{3}{z} \cos z \right\}, \\
J_{-\frac{5}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{3}{z} \sin z + \left(\frac{3}{z^2} - 1 \right) \cos z \right\}, \\
N_{n+\frac{1}{2}}(z) &= (-1)^{n-1} \cdot I_{-n-\frac{1}{2}}(z); \\
N_{-n-\frac{1}{2}}(z) &= (-1)^n \cdot I_{n+\frac{1}{2}}(z).
\end{aligned} \tag{257}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Эти условия сводятся к требованию, чтобы функция y обращалась в нуль на границе ямы при $r = R$ и чтобы при $r_{f=0}$ (при переходе через точку, в которой $f = \omega^2/v^2 - l(l+1)/r^2 = 0$) вторая производная y'' равнялась нулю. Заметим, что квантовая частота частицы вычисляется просто, так как частица от столкновения до столкновения летит как свободная частица.

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{mv^2}{h} = \frac{2E}{h}, \quad \omega_{\text{кв}} = \frac{4\pi E}{h}. \tag{258}$$

При $l = 0$ получим случай, рассмотренный в § 3 гл. 2 (переходная точка совпадает с центром сферы). Для этого случая

$$E = \frac{n^2 h^2}{8mR^2}, \quad \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\pi^2 n^2}{R^2}. \tag{259}$$

При $l \neq 0$ определяется точка $r_{f=0}$

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{l(l+1)}{r_{f=0}^2}. \tag{260}$$

Для простоты рассмотрим случай $l = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{r} \left[C_1 J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega}{v} r\right) + C_2 N_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega}{v} r\right) \right] = \\
&= C_1 \left(\frac{\sin \frac{\omega}{v} r}{\frac{\omega}{v} r} - \cos \frac{\omega}{v} r \right) + C_2 \left(-\sin \frac{\omega}{v} r - \frac{\cos \frac{\omega}{v} r}{\frac{\omega}{v} r} \right).
\end{aligned} \tag{261}$$

Из-за отсутствия сил внутри сферы не могут и возникнуть квантовые силы и потенциалы бесконечной величины. Поэтому и члены, содержащие

множитель $1/r$, который стремится к ∞ при $r \rightarrow 0$, должны в решении отсутствовать. Отсюда $C_2^1 = 0$. Таким образом, получим

$$y = C_1' \left(\frac{\sin \frac{\omega}{v} r}{\frac{\omega}{v} r} - \cos \frac{\omega}{v} r \right). \quad (262)$$

При $r = R$ имеем $y = 0$, т. е.

$$\sin \frac{\omega R}{v} = \frac{\omega}{v} \cos \frac{\omega}{v} R \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{v} R = \frac{\omega}{v} R. \quad (263)$$

n -й корень этого уравнения обозначим γ_n

$$\frac{\omega}{v} R = \gamma_n.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{\gamma_n}{R} \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{4\pi E}{h}; \quad E = \frac{h^2 \gamma_n^2}{8\pi^2 m R^2} = \frac{m v^2}{2}. \quad (264)$$

Проверим теперь условия в переходной точке $r_{f=0}$

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{l(l+1)}{r_{f=0}^2} = \frac{2}{r_{f=0}^2} = \frac{\gamma_n^2}{R^2}; \quad \frac{\omega}{v} r_{f=0} = \sqrt{2}. \quad (265)$$

Вторая производная в этой точке

$$y'' = \left(-\frac{\omega}{v} \sin \frac{\omega}{v} r + \frac{\omega^2}{v^2} \cos \frac{\omega}{v} r \right) \Big|_{r_{f=0}} \quad (266)$$

при подстановке указанных значений ω , v , $r_{f=0}$ будет тождественно равна нулю.

Таким же образом можно найти уровни энергии при $l = 2$ и т. д.

§ 3. Задача об атоме водорода (l -состояния).

Начнем с уравнения для скалярной Ψ -функции. Это уравнение с выделенным временным множителем будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\omega^2}{v^2} \Psi = 0. \quad (267)$$

Поскольку v^2 является функцией координаты r ($v^2 = \frac{2}{m} \times \left(E + \frac{e^2}{r} \right)$), члены уравнения можно сгруппировать следующим образом:

$$r^2 \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\omega^2}{v^2} \Psi \right] + \Delta^* \Psi = 0. \quad (268)$$

Полагая $\Psi = R(r) Y(\varphi, \theta)$, можно для каждого множителя получить свое уравнение

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\kappa^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (269)$$

$$\Delta^* Y = \frac{1}{\sin \Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \cdot \frac{\partial Y}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\kappa^2 Y.$$

Последнее уравнение допускает еще одно разделение переменных $Y = \Theta(\Theta) \Phi(\varphi)$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi, \quad (270)$$

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left(\kappa^2 - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) \Theta = 0; \quad x = \cos \Theta.$$

Эти уравнения имеют известные решения

$$\Phi = \cos m\varphi; \quad \Theta = |x^2 - 1|^{\frac{m}{2}} \cdot P_l^m(x);$$

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{|m|}{2}} \cdot \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x); \quad P_l = \frac{1}{2^l \cdot l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l; \quad (271)$$

$$x = \cos \theta, \quad \kappa^2 = l(l + 1).$$

Поскольку уравнение для функции Θ совпадает с уравнением для скалярного квантового потенциала ротатора, то коэффициент κ^2 будет иметь следующий физический смысл

$$\kappa^2 = l(l + 1) = \frac{8\pi^2 l E_\varphi}{h^2} = \frac{4\pi^2}{h^2} p_\varphi^2. \quad (272)$$

Здесь p_φ - момент количества движения электрона.

Для векторной Ψ -функции из соображений симметрии берем только компоненту A_φ . v -уравнение для нее с выделенным временным множителем будет иметь вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial \Theta} - \frac{A_\varphi}{\sin^2 \Theta} \right) + \right. \quad (273)$$

$$\left. + \frac{\omega^2}{v^2} A_\varphi \right] = 0.$$

Как и в случае ротатора $\partial A_\varphi / \partial \varphi = 0$. Поэтому $A_\varphi = A(r)A(\theta)$ и уравнение для A_φ запишется в форме, пригодной для разделения переменных

$$\frac{1}{A(r)} \cdot \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dA(r)}{dr} + \frac{\omega^2 r^2}{v^2} A(r) \right] + \frac{1}{A(\theta)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{dA(\theta)}{d\theta} - \frac{A(\theta)}{\sin^2 \theta} \right) \right] = 0. \quad (274)$$

Получим два уравнения:

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{dA(\theta)}{d\theta} - \frac{A(\theta)}{\sin^2 \theta} \right) + \kappa^2 A(\theta) = 0, \quad (275)$$

$$\frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dA(r)}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\kappa^2}{r^2} \right) A(r) = 0.$$

Решение для первого уравнения мы рассмотрели в параграфе о ротаторе. Уравнение для $A(r)$ совпадает с уравнением для радиальной части скалярной Ψ -функции ν -уравнения для атома водорода с вращением. Поэтому мы рассмотрим далее решение только для уравнения (269). Найдем прежде всего квантовую частоту $\omega_{\text{кв}}$ для нашего случая. Как и раньше, эта частота определяется через средние величины скорости и длины волны де Бройля

$$\omega_{\text{кв}} = 2\pi\bar{\nu} = 2\pi\frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}.$$

Поскольку классическая траектория электрона в данном случае представляет собой эллипс, интегралы для определения \bar{v} и $\bar{\lambda}$ берем вдоль линии эллипса

$$\bar{v} = \int v ds, \quad \bar{\lambda} = \frac{h}{m} \int \frac{ds}{v}. \quad (276)$$

Здесь

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{e^2}{r} \right)}, \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2} dr.$$

$d\varphi/dr$ определяется из уравнения эллипса $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$. Отсюда

$$1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = \frac{r^2 (\varepsilon^2 - 1) + 2pr}{r^2 (\varepsilon^2 - 1) + 2pr - p^2}. \quad (277)$$

Параметр $p = (\varepsilon^2 - 1) \frac{e^2}{2E}$. Интегрирование по r идет в пределах от $r_1 = -\frac{e^2}{2E} (1 - \varepsilon)$ до $r_2 = -\frac{e^2}{2E} (1 + \varepsilon)$. Подсчеты дают

$$\bar{\lambda} = -\frac{he^2\pi}{4E^2} \sqrt{-\frac{2E}{m}}, \quad \bar{v} = -\frac{e^2\pi}{2E} \sqrt{-\frac{2E}{m}}. \quad (278)$$

Откуда

$$\bar{\nu} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = -\frac{2E}{h} \quad \text{или} \quad \omega_{\text{кв}} = -\frac{4\pi E}{h}. \quad (279)$$

Теперь мы можем написать уравнение для R полностью

$$-\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \left(\frac{8\pi^2 m E^2}{-h^2 E \left(1 + \frac{e^2}{2E} \right)} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0. \quad (280)$$

Введем для краткости обозначения $-\frac{8\pi^2 m E}{h^2} = A$, $-\frac{e^2}{E} = B$ и сделаем

замены $x = \frac{r}{B}$, $R = \frac{y}{x}$. Тогда для y получится уравнение

$$y'' - \left(\frac{AB^2 x}{x-1} + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) y = 0. \quad (281)$$

В этом уравнении функция $f = \left(\frac{AB^2 x}{x-1} + \frac{l(l+1)}{x^2} \right)$ в определенной точке

$x_{f=0}$ меняет знак. При $x > x_{f=0}$, когда $f < 0$ решение будет периодической функцией, до этой точки решение будет непериодической функцией.

Граничные условия - обычные: y должно быть равно нулю при $x = 1$? (на краю ямы) и $y''=0$ в точке $x_{f=0}$. Однако уравнение получается сложным для аналитического решения.

Здесь нас будет интересовать вопрос о том, будет ли это уравнение удовлетворяться при тех же значениях энергии, как и уравнение для s -состояний. Из уравнения (281) видно, что по мере приближения x к единице член $\frac{l(l+1)}{x^2} \rightarrow l(l+1)$, член же $\frac{AB^2x}{x-1}$ неограниченно возрастает. Таким образом, при приближении x к 1 само уравнение (281) приближается к уравнению для s -состояний атома водорода, так же как решение уравнения для l -состояний приближается к решению для s -состояний. Если вообще уравнение l -состояний удовлетворяется теми же значениями энергии, как и уравнение для s -состояний (а этого требует опыт), то мы можем построить решения уравнения (281) исходя из решений уравнения для s -состояний для соответствующих значений E . Мы будем пользоваться для этого методом Рунге-Кутты [14]. Для примера рассмотрим по строение решения для $AB^2 = \lambda = 16$ ($n = 2$) и $l = 1$. Решение уравнения для s -состояний для этого значения λ дает (с точностью до амплитудного множителя)

$$y = e^{4x} (-3 + 7x - 4x^2),$$

$$y' = e^{4x} (-5 + 20x - 16x^2).$$

Интервал от $x = 0$ до $x = 1$ разбиваем на 20 отрезков каждый длиной $h = 0,05$. Начальные данные берем при $x_0 = 0,975$ или $\xi_0 = 1 - x_0 = 0,025$. Получаем

$$y_0 = 1,11253 = v_{0,0},$$

$$y'_0 = -35,07147,$$

$$v_{1,0} = hy'_0 = 0,05 \cdot 35,07147 = 1,75357.$$

Вычисления ведем по схеме

	x	$v_0 = y$	$\kappa = \frac{h^2}{2} f(x) v_0$
I	x_0	$v_{0,0}$	κ_1
II, III	$x_0 + \frac{h}{2}$	$v_{0,0} + \frac{1}{2} v_{1,0} + \frac{1}{4} \kappa_1$	$\kappa_2 = \kappa_3$
IV	$x_0 + h$	$v_{0,0} + v_{1,0} + \kappa_2$	κ_4
V	$x_1 = x_0 + h$	$v_{0,1} = v_{0,0} + v_{1,0} + \kappa^{(0)}$	

$$v_{1,1} = v_{1,0} + \kappa^{(1)},$$

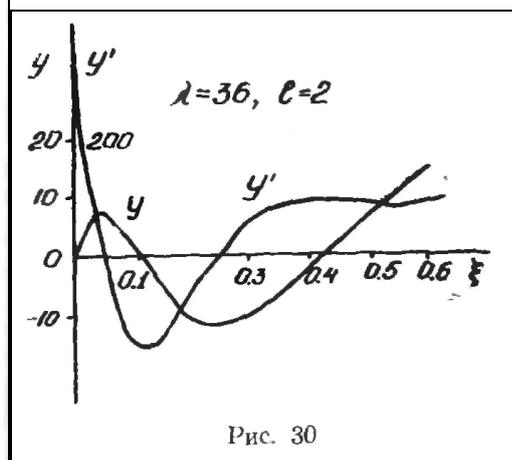
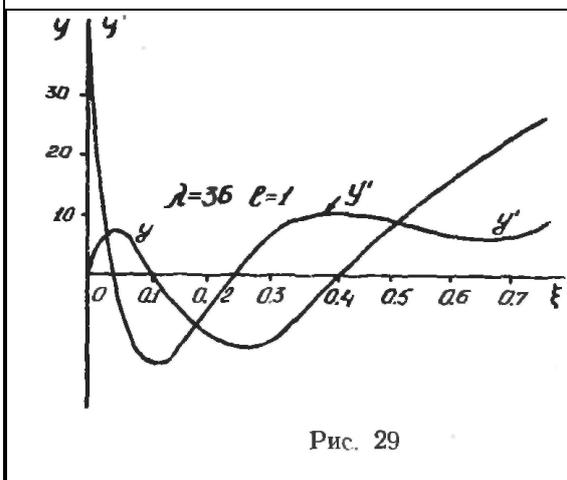
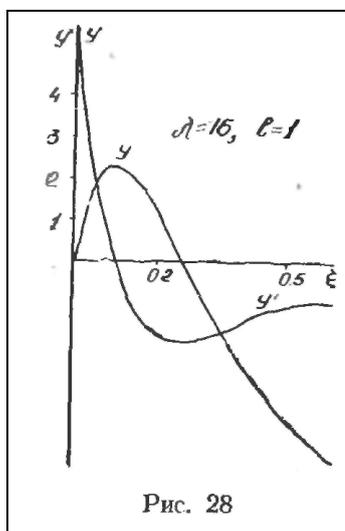
$$\kappa^{(0)} = \frac{1}{3} (\kappa_1 + 2\kappa_2),$$

$$\kappa^{(1)} = \frac{1}{3} (\kappa_1 + 4\kappa_2 + \kappa_4),$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{h^2}{2} f(x_0) \cdot v_{0,1} = 0,125 \cdot 10^{-2} (-621,89613) 1,11253 = \\
&= -10^{-2} \cdot 86,48476, \quad \kappa_2 = \frac{h^2}{2} f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \left(v_{0,0} + \frac{1}{2} v_{1,0} + \frac{1}{4} \kappa_1\right) = \\
&= 0,125 \cdot 10^{-2} (-301,78394) \times (1,11253 + 0,87678 - 0,21621) = \\
&= -10^{-2} \cdot 66,88664, \quad \kappa_4 = \frac{h^2}{2} f(x_0 + h) (v_{0,0} + v_{1,0} + \kappa_2) = \\
&= 0,125 \cdot 10^{-2} (-194,94581) \times (1,11253 + 1,75357 - 0,66887) = \\
&= -10^{-2} \cdot 53,55633, \\
\kappa^{(0)} &= \frac{10^{-2}}{3} (-86,48476 - 2 \cdot 66,88664) = -10^{-2} \cdot 73,41934, \\
\kappa^{(1)} &= \frac{10^{-2}}{3} (-86,48476 - 4 \cdot 66,88664 - 53,55633) = \\
&= -10^{-2} \cdot 135,86255, \quad v_{0,1} = 1,11253 + 1,75357 - 0,73419 = 2,3191, \\
v_{1,1} &= 1,75357 - 1,35862 = 0,39495, \\
y' &= 7,899.
\end{aligned}$$

Полученные данные $v_{0,1}$ и $v_{1,1}$ используются для вычислений на следующем отрезке, начинающемся с $x = 0,925$ ($\xi = 0,075$).

Результаты вычислений y и y' представлены на рис. 28. На рис. 29, 30 приведены соответствующие кривые для $\lambda = 36$ ($n=3$) и $l=1$ и $l=2$. Из рисунков видно, что условие $y'' = 0$ при $x = x_{f=0}$ выполняется, так при этом значении x на кривых y' имеется перегиб.



На рис. 31, 32 показаны кривые y для соответствующих уровней энергии для $l=0$ и $l \neq 0$. Хорошо видно, что совпадение кривых идет достаточно далеко, чтобы можно было воспользоваться для определения начальных данных по кривым для уравнения s -состояний.

Таким образом, можно считать доказанным, что v -уравнение и для l -состояний дает правильное квантование, как и уравнение Шредингера. Однако здесь мы имеем возможность говорить о траекториях электронов. Эллиптические зоммерфельдовские орбиты, с нашей точки зрения, представляют реальную основу истинного движения электронов в атоме водорода с тем дополнением, что в s -состоянии эти орбиты вырождаются в прямые линии, идущие по радиусу. Эксцентриситет эллипса

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EP_{\varphi}^2}{me^4}}$$

определяется значениями энергии E и момента количества движения p_{φ} , которые принимают значения

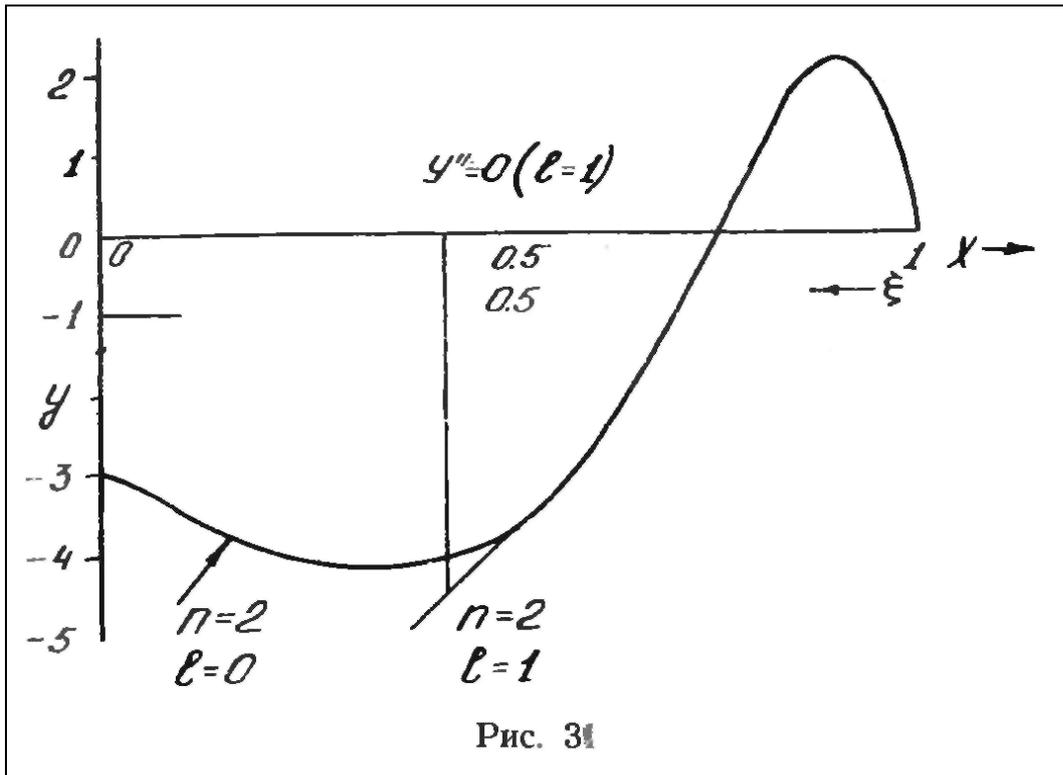
$$E = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2}, \quad p_{\varphi}^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} l(l+1). \quad (283)$$

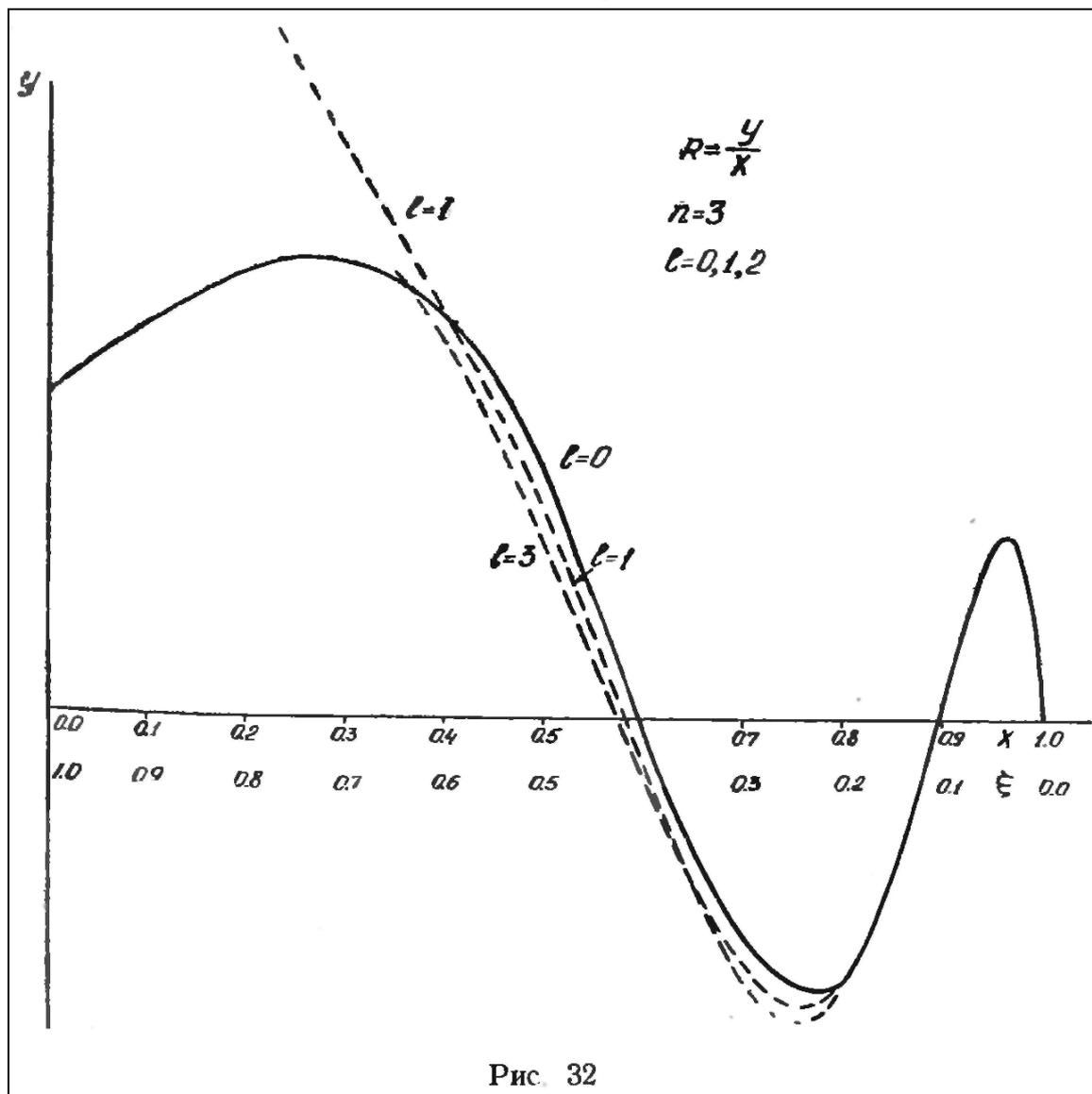
Таким образом, получается, что

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{l(l+1)}{n^2}}. \quad (284)$$

Абсолютные размеры эллипса определяются величинами

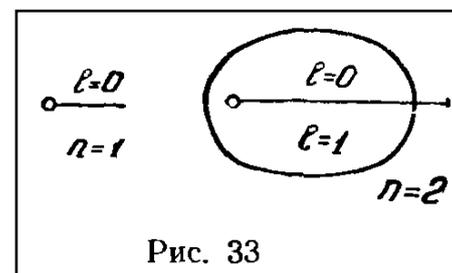
$$r_{\max} = -\frac{e^2}{2E}(1 + \epsilon), \quad r_{\min} = -\frac{e^2}{2E}(1 - \epsilon). \quad (285)$$

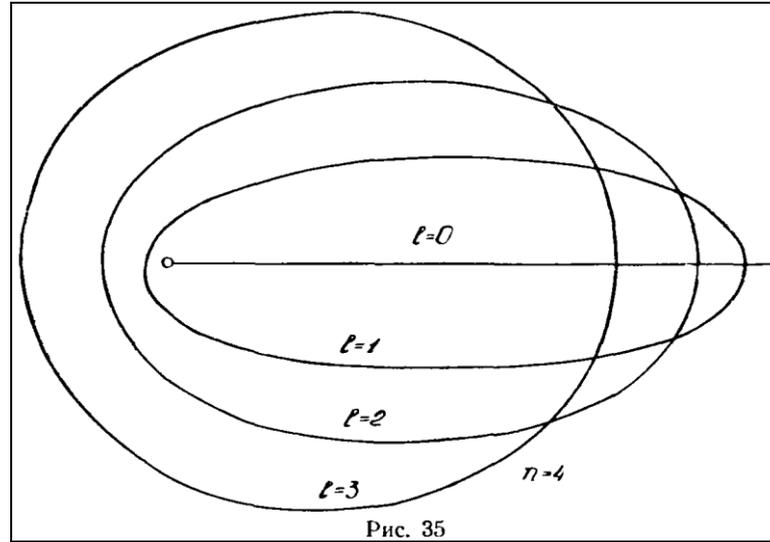
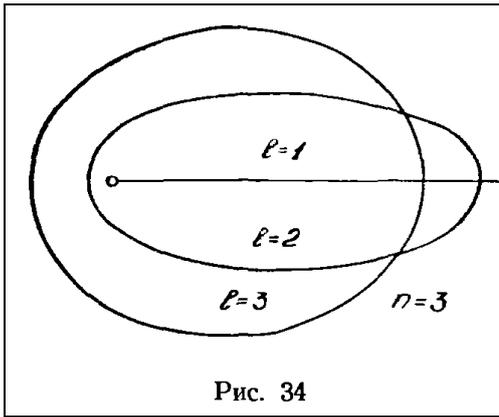




На рис. 33, 34, 35 показаны возможные классические орбиты для $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$. Истинное движение электронов мы можем вычислить, зная Ψ -функции для данной задачи (см. об этом следующую главу).

Как видно из задачи предыдущего параграфа и задачи об l -состояниях атома водорода, картина волн в φ и Θ направлениях определяется не конкретной формой классической траектории частицы, а только пространственной симметрией потенциальной ямы и наличием вращательного момента у частицы, движущейся в этой яме.





§ 4. Релятивистский вариант задачи об атоме водорода (s-состояния).

Угловая часть решения для ν -уравнения будет и в этом случае такой же, как в нерелятивистском случае и для скалярного ν -уравнения, и для векторного ν -уравнения. Радиальная часть Ψ -функции в обоих случаях будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0.$$

Здесь для ω^2 и v^2 нужно брать релятивистские соотношения.

В случае s-состояний берется только скалярное уравнение. Поскольку в этом случае $l = 0$, то из соотношения

$$E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) - \frac{e^2}{r} = \omega \quad (286)$$

получаем

$$v = c \frac{\sqrt{\left(m_0 c^2 + \omega + \frac{e^2}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4}}{m_0 c^2 + \omega + \frac{e^2}{r}}. \quad (287)$$

В противоположность нерелятивистскому случаю скорость обращается в нуль в двух точках:

$$r_1 = -\frac{e^2}{2m_0 c^2 + \omega}, \quad r_2 = -\frac{e^2}{\omega}. \quad (288)$$

r_1 имеет величину порядка радиуса протона. Таким образом, даже при $l = 0$ релятивистское уравнение похоже на ν -уравнение для l -состояний в нерелятивистском случае.

Квантовую частоту определяем обычным способом по усредненным v и λ

$$\bar{\nu} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{\left(m_0 c^2 + \omega + \frac{e^2}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4}}{m_0 c^2 + \omega + \frac{e^2}{r}} dr =$$

$$= \frac{\pi e^2 m_0 c^2}{a} \left(-1 + \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{-2m_0 c^2 \omega - \omega^2}} \right), \quad (289)$$

$$\bar{\lambda} \doteq h \int_{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\left(m_0 c^2 + \omega + \frac{e^2}{r}\right)^2 - m_0^2 c^4}} =$$

$$= h \left[-\frac{\pi e^2 a}{(a^2 - m_0^2 c^4) \sqrt{-2m_0 c^2 \omega - \omega^2}} \right],$$

$$a = m_0 c^2 + \omega.$$

Отсюда квантовая частота

$$\omega_{\text{кв}} = 2\pi \frac{\bar{\nu}}{\bar{\lambda}} = \frac{2\pi m_0 c^2}{h a^3} \left[\sqrt{-2m_0 c^2 \omega - \omega^2} - 2m_0 c^2 \right] (a^2 - m_0^2 c^4). \quad (290)$$

При малых ω получим обычную нерелятивистскую формулу

$$\omega_{\text{кв}} = -\frac{4\pi\omega}{h}.$$

Уравнение для радиальной части Ψ -функции запишется теперь как

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\frac{\omega_{\text{кв}}^2}{c^2} \cdot \frac{(ar + e^2)^2}{(ar + e^2)^2 - m_0^2 c^4 r^2} \right] R = 0. \quad (291)$$

Делаем обычную замену $R=y/r$, тогда

$$y'' + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{[(E_0 + \omega)r + e^2]^2}{[(E_0 + \omega)r + e^2]^2 - E_0^2 r^2} y = 0, \quad E_0 = m_0 c^2. \quad (292)$$

Здесь функция при y обращается в нуль при

$$r = -\frac{e^2}{E_0 + \omega}. \quad (293)$$

В другой записи

$$\{[(E_0 + \omega)r + e^2]^2 - E_0^2 r^2\} y'' + \frac{\omega^2}{c^2} [(E_0 + \omega)r + e^2]^2 y = 0. \quad (294)$$

Вводя переменную $r = -\frac{e^2}{\omega} x$ и величины r_1 и r_2 ($r_2 = -\frac{e^2}{\omega}$, $r_1 = -\frac{e^2}{2E_0 + \omega}$ — корни коэффициента перед второй производной y''), приводим уравнение к форме

$$(x - x_1)(x - x_2) y'' + \frac{\omega^2 e^4}{c^2 (2E_0 + \omega) \omega} \left[-\frac{E_0 + \omega}{\omega} x + 1 \right]^2 y = 0. \quad (295)$$

Полагая ω малым, получим, очевидно, нерелятивистское уравнение для состояний атома водорода.

Упростим уравнение, обозначив $A' = -\frac{\omega^2 e^4}{c^2 (2E_0 + \omega) \omega}$; $\alpha = \frac{E_0 + \omega}{\omega}$ и приняв во внимание, что

$$x_2 = \frac{r_2}{r_2} = 1 \left(x_1 = \frac{r_1}{r_2} = -\frac{\omega}{2E_0 + \omega} \right) (x - 1)(x - x_1) y'' - A' [-\alpha x + 1]^2 y = 0. \quad (296)$$

Решение полагаем в виде $y = e^{\beta x} \cdot \eta(1 - x)$. Коэффициент β подбираем равным $\beta^2 = A' \alpha^2 = \lambda$. Тогда, полагая $1 - x = \xi$, получим для функции $\eta(\xi)$ уравнение

$$\xi(\xi - \gamma)\eta'' - 2\sqrt{\lambda}\xi(\xi - \gamma)\eta' + \lambda\left[\xi\left\{-\frac{2}{\alpha}(1 - \alpha) - \gamma\right\} - \frac{1}{\alpha^2}(1 - \alpha)^2\right]\eta = 0. \quad (297)$$

Здесь дополнительно обозначено $\gamma = 1 - x_1$. Решение уравнения ищем в виде ряда $\eta = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \xi^m$. Для коэффициентов ряда получаются рекуррентные формулы

$$b_2 = \frac{2\sqrt{\lambda}\gamma - \frac{\lambda}{\alpha^2}(1 - \alpha)^2}{2\gamma} b_1, \quad (298)$$

$$b_{m+1} = \frac{m(m-1) + 2\sqrt{\lambda}\gamma m - \frac{\lambda}{\alpha^2}(1 - \alpha)^2}{m(m+1)\gamma} b_m + \frac{-2\sqrt{\lambda}(m-1) + \lambda\left[-\frac{2}{\alpha}(1 - \alpha) - \gamma\right]}{m(m+1)\gamma} b_{m-1}.$$

В нерелятивистском случае $\alpha \approx \frac{E_0}{w} \gg 1$, $\gamma = 1$ и трехчленные рекуррентные формулы переходят в двухчленные.

Граничные условия при $\xi = 0$ (т. е. при $x = 1$) выполняются автоматически в силу сделанного нами выбора функции η . Вторым граничным условием является равенство нулю второй производной y'' при $r = -\frac{e^2}{E_0 + w}$.

Поскольку уровни релятивистские чрезвычайно мало отличаются от уровней нерелятивистских

$$w = -\frac{4\pi^2 e^4 m_0}{2h^2 n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{3}{4n}\right)\right] \approx -\frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^2 n^2} = E \quad (299)$$

(точная формула, даваемая теорией Дирака

$$\frac{w}{m_0 c^2} = \left[1 + \left(\frac{\alpha}{n - \kappa + \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - 1;$$

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}; \quad \kappa = 1, 2, \dots, n)$$

вычисление по нашим формулам требует очень большой точности.

§ 5. Релятивистский вариант задачи об атоме водорода (I-состояния).

В этом случае v -уравнение может быть написано для скалярной Ψ -функции или для векторной. Для радиальной части этих функций получаем обычное уравнение

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R = 0$$

или, полагая $R = \frac{y}{r}$,

$$y'' + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\left(m_0 c^2 + w + \frac{e^2}{r}\right)^2}{\left[\left(m_0 c^2 + w + \frac{e^2}{r}\right)^2 - m_0^2 c^4\right]} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] y = 0. \quad (300)$$

При некотором значении $r_{f=0}$ выражение в скобках обращается в нуль и $y''=0$.

Для вычисления квантовой частоты нужно знать классическое движение электрона вокруг протона в релятивистском случае при вращательном моменте его $p_\varphi = mr^2\varphi'$ отличном от нуля. Эта задача была рассмотрена Зоммерфельдом [15]. Как известно, электрон в этом случае движется по эллипсу, афелий и перигелий которого движутся по двум концентрическим окружностям вокруг ядра. Уравнение такого эллипса имеет вид

$$r = \frac{1}{C + A \cos \gamma\varphi}. \quad (301)$$

Здесь

$$C = \frac{m_0 e^2}{P_\varphi^2 \gamma^2} \left(1 + \frac{\omega}{m_0 c^2} \right); \quad \gamma^2 = 1 - \frac{e^4}{p_\varphi^2 c^2}. \quad (302)$$

Постоянная A определяется из условий

$$\frac{1}{r_{\min}} = C + A; \quad \frac{1}{r_{\max}} = C - A. \quad (303)$$

Значения r_{\min} и r_{\max} определяются по скорости вдоль классической траектории, которая будет выражаться той же формулой, что и для случая s-состояния

$$v = c \frac{\sqrt{\left(m_0 c^2 + \omega + \frac{e^2}{r}\right)^2 - m_0^2 c^4}}{m_0 c^2 + \omega + \frac{e^2}{r}}. \quad (304)$$

Выразим скорость v через импульсы $p_r = mr'$ и $p_\varphi = mr^2\varphi'$:

$$1 + \frac{1}{m_0^2 c^2} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) = \left(1 + \frac{\omega + \frac{e^2}{r}}{m_0 c^2} \right)^2. \quad (305)$$

В крайних точках по радиусу $p_r = mr' = 0$, и для этих точек получается уравнение

$$r_{\text{кр}}^2 [2m_0 c^2 + \omega] \omega + r_{\text{кр}} [m_0 c^2 + \omega] 2e^2 + [e^4 - p_\varphi^2 c^2] = 0. \quad (306)$$

Отсюда

$$r_{1,2} = \frac{-e^2 (m_0 c^2 + \omega) \pm \sqrt{e^4 m_0^2 c^4 + (2m_0 c^2 + \omega) \omega p_\varphi^2 c^2}}{\omega (2m_0 c^2 + \omega)}. \quad (307)$$

Таким образом, A и, соответственно, $\varepsilon = A/C$ выражаются очень громоздкими формулами.

Для определения квантовой частоты необходимо вычислить интегралы

$$\bar{\nu} \doteq \int v ds \quad \text{и} \quad \bar{\lambda} \doteq h \int \frac{ds}{mv}. \quad (308)$$

Поскольку

$$ds = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} dr = \sqrt{\frac{\gamma^2 r^2 \left(A^2 - \left(\frac{1}{r} - C\right)^2\right) + 1}{\gamma^2 r^2 \left(A^2 - \left(\frac{1}{r} - C\right)^2\right)}} dr, \quad (309)$$

то интегралы для ν и λ получаются очень сложными. Например,

$$\bar{\nu} \doteq c \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\sqrt{[(m_0 c^2 + \omega) r + e^2]^2 - m_0^2 c^4 r^2}}{(m_0 c^2 + \omega) r + e^2} \times \\ \times \frac{\sqrt{\gamma^2 r^2 (A^2 r^2 - (1 - rC)^2 + r^2)}}{\sqrt{A^2 r^2 - (1 - rC)^2}} \cdot \frac{dr}{\gamma r}. \quad (310)$$

Таким образом, квантовая частота может быть определена только численно для разных комбинаций величин ω и p_φ . Вернемся теперь к нашему уравнению:

$$r^2 [(ar + e^2)^2 - E_0^2 r^2] y'' + \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} r^2 (ar + e^2)^2 - l(l+1) \right\} \times \\ \times [(\alpha r + e^2)^2 - E_0^2 r^2] y = 0. \quad (311)$$

Введем переменную $x = -\frac{\omega}{e^2} r$ и соответствующие величины корней коэффициента, стоящего перед второй производной y'' :

$$x_1 = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega}{2E_0 + \omega}; \quad x_2 = \frac{r_2}{r_2} = 1; \\ \left[r_1 = -\frac{e^2}{2m_0 c^2 + \omega}, \quad r_2 = -\frac{e^2}{\omega} \right].$$

Получим уравнение в виде

$$x^2 [(x - x_1)(x - x_2)] y'' + \left\{ \frac{\omega^2 e^4 x^2}{c^2 (2m_0 c^2 + \omega) \omega} \right\} \times \\ \times \left(-\frac{ax}{\omega} + 1 \right)^2 - l(l+1)(x - x_1)(x - x_2) \Big\} y = 0. \quad (312)$$

Это уравнение также можно решить только численно, подбирая такие величины ω и p_φ (и соответствующую величину квантовой частоты), чтобы удовлетворялись граничные условия и на краю ямы и в точке, где меняется знак функции перед y -ом в уравнении (300).

Возможно, что если преодолеть вычислительные трудности, то можно будет получить интересные результаты, поскольку в свое время релятивистское обобщение задачи об атоме водорода дало возможность и Зоммерфельду и Дираку объяснить тонкую структуру спектра атома водорода, хотя, например, Зоммерфельд и не пользовался понятием спина.

Глава V

КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ КАК АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Свойства автоколебательных систем.

Обычно рассматриваются чисто механические или радиотехнические автоколебательные системы. Напомним некоторые характеристики таких систем [16, 17, 18].

Автоколебательные системы характеризуются дискретным множеством возможных либрационных или ротационных колебательных движений системы. Если в консервативной колебательной системе возможны колебания с любой постоянной амплитудой, то в автоколебательной системе колебания с постоянной амплитудой возможны лишь при некотором определенном ее значении.

Механические автоколебания часто получаются при трении. Типичный пример - резкий звук, получающийся при определенном скольжении ножа по тарелке. Несмотря на наличие трения, в системе устанавливаются и поддерживаются незатухающие колебания за счет сил, создающихся и определяющихся самим движением, причем амплитуда этих колебаний определяется опять-таки свойствами системы, а не начальными условиями. Колебания устойчивы, так как отклонения (в обе стороны) от стационарного режима затухают. В некоторых автоколебательных системах может существовать несколько стационарных процессов с различными амплитудами.

Устойчивый режим автоколебаний определяется энергетическим балансом, т. е. равенством энергии, подводимой от источника к колеблющейся системе, и энергии, теряемой системой. При переходе от одного устойчивого режима к другому будет происходить дополнительная потеря или поглощение энергии.

Как видим, характерное свойство автоколебательных систем — набор дискретных энергетических состояний - есть и характерное свойство квантовых систем. Будут ли элементарные частицы совершать автоколебания или нет, на этот вопрос обычная квантовая механика ответить не может, так как она не может принципиально рассматривать какое-либо конкретное движение данной частицы, поскольку мы такое движение непосредственно наблюдать не можем. А раз не можем наблюдать, то значит этого движения нет! Вывод явно неправильный. Ведь никто не утверждает, что звезды не имеют размеров на том основании, что мы до сих пор не можем видеть диски звезд, и мы можем определить размеры звезд только косвенными методами (например, с помощью интерферометра). Так и в квантовой механике, используя известные

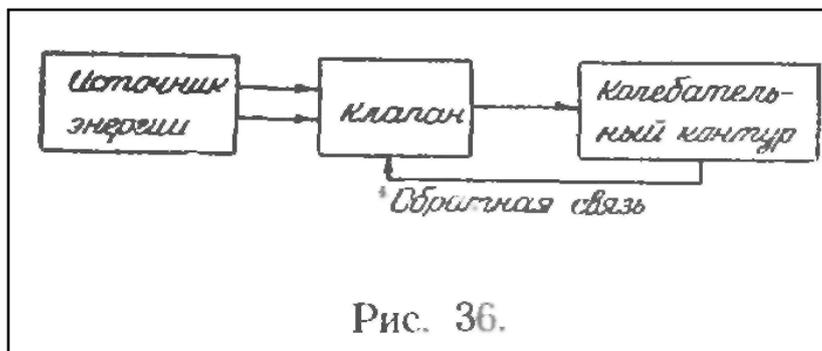
закономерности, имеющие место для атомных систем (например, существование ν -уравнения), мы можем логически перейти к более глубоким закономерностям движения атомных частиц, проверить наличие этих закономерностей по их следствиям, допуская опытную проверку, хотя, конечно, непосредственно «увидеть» движение этих частиц мы можем быть никогда и не сможем.

§ 2. Автоколебания свободно движущейся частицы.

Покажем, что с точки зрения автоколебательной квантовой механики свободно движущаяся частица представляет собой автоколебательную систему.

Прежде всего рассмотрим типичные механические или электрические колебания [16]. Начнем со свободных колебаний в некотором колебательном контуре. Если бы контур был без потерь, то в нем колебания были бы незатухающими. В обычном механическом или электрическом контуре всегда имеются потери, кроме того, колебательная энергия может отбираться от контура, если он должен быть генератором колебаний. Чтобы получать незатухающие колебания в этом случае, необходимо пополнять запас энергии в контуре. Таким образом, в состав колебательной системы должен входить источник энергии.

Чтобы поддерживать колебания в контуре, энергию нужно подводить периодически, отдельными порциями. Должен быть орган, который будет управлять поступлением энергии в



контур (клапан). Чтобы работа клапана была согласована с колебаниями в контуре, нужно, чтобы работа клапана управлялась самим контуром. Механизм управления клапаном со стороны контура называется обратной связью. Схема автоколебательной системы показана на рис. 36.

Рассмотрим самый простой случай: свободно движущуюся частицу. Что мы имеем для свободно движущейся частицы? ν -уравнение для нее

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

имеет решение в виде функции (см. гл. III, § 1)

$$\psi = A \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x \right).$$

Если считать, как мы уже говорили, что ψ -функция представляет собой некоторую потенциальную функцию, описывающую распределение и величину сил вблизи движущейся частицы, действующих на нее со стороны среды ("эфира" или "вакуума"), в которой движется частица, то можно для

величины этих "квантовых" сил написать уравнение

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}. \quad (313)$$

В написанном выше выражении для $\psi(x, t)$ координата x является чисто геометрической величиной: при фиксированном t координата x может принимать, вообще говоря, любые значения. В уравнении квантового движения (313) x должно быть координатой точки, в которой находятся частицы. Эта координата только в некоторые моменты совпадает с координатой ее классического движения $x_{\text{кл}}$, вообще же

$$x^* = x_{\text{кл}} + \xi; \quad (314)$$

здесь ξ — квантовый сдвиг частицы относительно ее классической координаты. Для дальнейшего ψ -функцию свободной частицы возьмем в виде

$$\psi = A \left[1 - \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right) \right]. \quad (315)$$

Таким образом,

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = A \frac{\omega}{v} \sin \left(\omega t - \frac{x\omega}{v} \right). \quad (316)$$

Поскольку производная, берется в точке фактического нахождения частицы $x^* = x_{\text{кл}} + \xi = vt + \xi$ то

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - A \frac{\omega}{v} \cdot \sin \frac{\omega}{v} \xi. \quad (317)$$

Так будет выглядеть квантовое уравнение движения частицы относительно ее классической координаты.

Это уравнение выражает обратную связь: классическое движение частицы со скоростью v вызывает появление волны де Бройля, описываемое соответствующим волновым v -уравнением, в свою очередь, эта волна вызывает появление сил, воздействующих на частицу.

Для энергии квантового движения попробуем написать выражение, аналогичное классическому

$$\frac{m\xi^2}{2} + A \left(1 - \cos \frac{\omega}{v} \xi \right) = H. \quad (318)$$

Если продифференцировать H по t , то получим

$$m\xi \ddot{\xi} + A \frac{\omega}{v} \sin \frac{\omega}{v} \xi \cdot \dot{\xi} = \dot{H}. \quad (319)$$

Умножая обе частицы квантового уравнения движения на $\dot{\xi}$ и сравнивая результат с только что полученным выражением, видим, что

$$\dot{H} = 0 \text{ и } H = C = \text{const}. \quad (320)$$

Обратимся теперь к уравнению квантового движения свободной частицы

(317). Это уравнение можно упростить, положив $y = \frac{\omega}{v} \xi$.

$$\ddot{y} + a \sin y = 0, \quad (321)$$

где $a = \frac{A\omega^2}{mv^2}$. Это есть уравнение математического маятника. Для маятника под y -ом понимается φ - угол отклонения нити его от вертикали. Умножая уравнение (321) на y' , получим

$$\frac{\dot{y}^2}{2} - a \cos y = W. \quad (322)$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим

$$\frac{m \dot{\xi}^2}{2} - A \cos \frac{\omega}{v} \xi = W \frac{v^2}{\omega^2} = C - A. \quad (323)$$

Амплитуда ψ -функции может быть определена из соотношения неопределенности

$$\Delta \xi \cdot \Delta m \xi = \frac{h}{2\pi}. \quad (324)$$

Будем считать, что $|\xi'|_{max} = v$ (подробнее об этом условии см. ниже), т. е., что квантовые силы не могут заставить частицу изменить направление классической скорости, а только уменьшить или увеличить ее числовую величину.

Тогда

$$\Delta \xi \cdot 2mv = \frac{h}{2\pi} \quad (325)$$

и

$$\Delta \xi = \frac{h}{4\pi mv} = \frac{\lambda}{4\pi}. \quad (326)$$

Поскольку ξ может быть добавлено или отнято от классической координаты, то

$$\xi_{max} = \frac{\lambda}{8\pi}. \quad (327)$$

Это дает возможность определить амплитуду A и постоянную C . При $\xi = \xi_{max}$ должно быть $\xi' = 0$, отсюда

$$A \left(1 - \cos \frac{\omega}{v} \frac{\lambda}{8\pi} \right) = C.$$

При $\xi' = \xi'_{max} = v$ $\xi = 0$ и

$$\frac{mv^2}{2} = C. \quad (328)$$

Таким образом,

$$A = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\omega}{v} \frac{\lambda}{8\pi}}. \quad (329)$$

Поскольку $\frac{\omega}{v} \frac{\lambda}{8\pi} = \frac{1}{4}$, то

$$A = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - \cos 0,25} \quad (330)$$

Как известно, решения уравнения математического маятника выражаются через эллиптические интегралы. Так как максимальное значение аргумента под знаком косинуса не превышает $1/4$, то можно сделать замены $\sin x = x$ и $\cos x = 1 - x^2/2$

Уравнение движения (317) запишется в виде

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + A \frac{\omega^2}{v^2} \xi = 0. \quad (331)$$

Отсюда

$$\frac{m \xi^2}{2} + \frac{A}{2} \frac{\omega^2}{v^2} \xi^2 = C. \quad (332)$$

Так как амплитуда в этом случае $A = 16mv^2$, то получим решения:

$$\xi = B \sin 4\omega t, \quad (333)$$

$$\dot{\xi} = B \cdot 4\omega \cos 4\omega t.$$

Из условия, что при $t = 0$, $\xi = 0$ и $\xi'_{max} = v$, получим

$$4\omega B = v$$

и

$$\xi_{max} = B = \frac{v}{4\omega} = \frac{h}{8\pi m v}. \quad (334)$$

Таким образом, истинное движение будет описываться формулами

$$x^* = x_{кл} + \xi = vt + \frac{h}{8\pi m v} \sin 4\omega t, \quad (335)$$

$$\dot{x}^* = v(1 + \cos 4\omega t) = v + \dot{\xi}.$$

Это движение изображено на рис. 37. Рассмотрим это движение с точки зрения неподвижного наблюдателя. На участке 1—3 скорость ξ направлена против скорости $v_{кл}$ и результирующая энергия частицы будет меньше энергии $mv^2/2$.

На участках 0—1 и 3—4 результирующая энергия будет, наоборот, больше энергии классического движения частицы. Кинетическая энергия квантового движения частицы должна быть, вообще говоря,

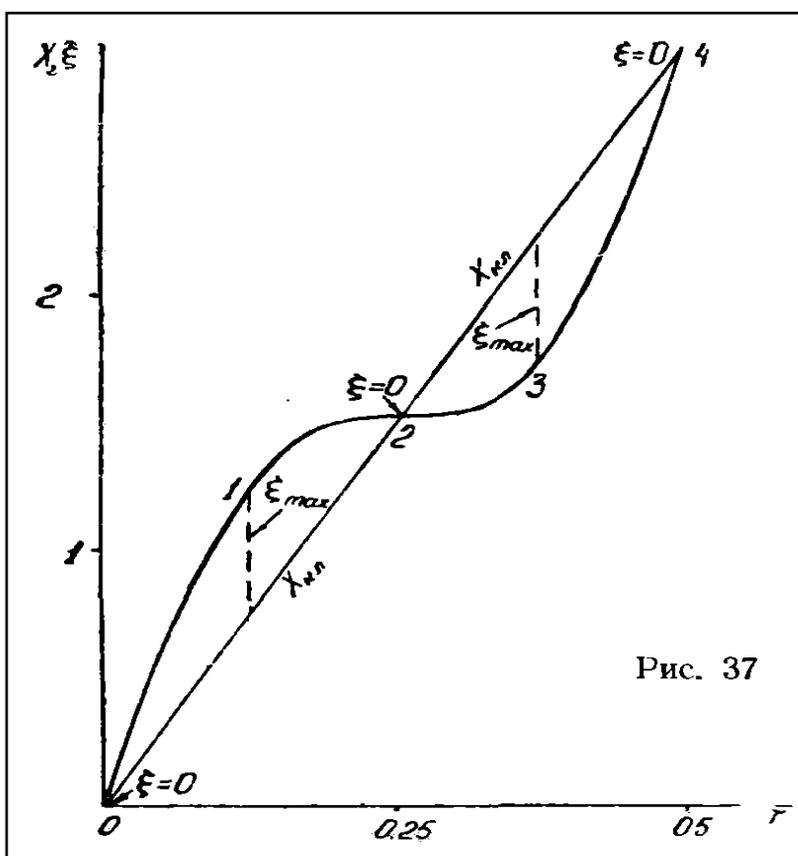


Рис. 37

отрицательной, поскольку v -уравнение получается из соотношений сопряженного мира. Однако сложение этой энергии с кинетической энергией классического движения будет идти по-разному на разных этапах: когда происходит "уничтожение" классического движения частицы, берется знак $+(-m\xi^2/2)$, когда происходит увеличение кинетической энергии частицы по сравнению с ее классической величиной, квантовая энергия берется со знаком $-(-m\xi^2/2)$. Колебания энергии представлены на рис. 38. Дело похоже на то, что получается при аннигиляции частиц, когда мы имели формулы

$$E + (-E) = 0 \text{ (аннигиляция)}$$

$$E - (-E) = 2E \text{ (образование фотонов).}$$

Энергии частицы и античастицы складываются при аннигиляции и вычитаются, когда речь идет об энергии образовавшихся при этом фотонов. В нашем же случае речь идет не об уничтожении частиц, а только об их торможении и последующем ускорении.

Что между этими явлениями существует связь, видно из следующих соображений. При двух фотонной аннигиляции частицы и античастицы получается два кванта с энергией

$$h\nu_c = mc^2. \quad (336)$$

С другой стороны, для частиц имеет место равенство

$$h\nu_u = mv^2.$$

Таким образом, в этом случае

$$\nu_c = \nu_u, \quad \frac{c}{\lambda_c} = \frac{u}{\lambda_u}, \quad \frac{mc^2}{h} = \frac{muv}{h}. \quad (338)$$

Здесь m , с одной стороны, является массой фотона, с другой стороны, m -

масса частицы $m = \sqrt{\frac{m_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Ввиду сходства структуры нашей формулы $h\nu_v = mv^2$ с приведенной, можно предположить, что $E_v = mv^2$ есть энергия частицы, которая может передаваться в вакуум. "Неприкосновенным" же запасом будет величина энергии

$$h\nu_c - h\nu_v = m(c^2 - v^2) = m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (339)$$

При $v = 0$ этот запас наибольший, при $v = c$ - наименьший. Поскольку, однако, энергия частицы выражается при небольших скоростях формулой

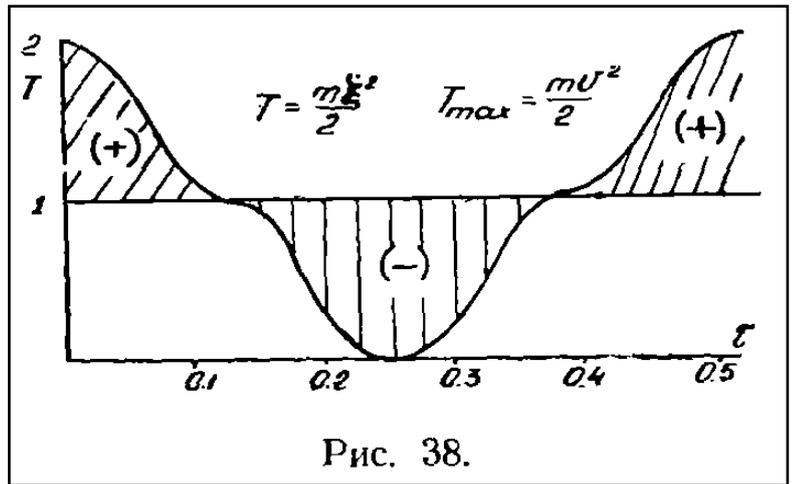


Рис. 38.

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

и, соответственно, энергия mv^2 выражается величиной

$$mv^2 \approx m_0 v^2,$$

отнятие полной энергии mv^2 может идти только за счет энергии покоя частицы. Поскольку трудно ожидать, что при "нормальном" движении частицы будут затрагиваться ее структура, передача энергии, совместимая с целостностью частицы, будет определяться величиной не $E_v \approx mv^2$, а половиной ее $E' \approx mv^2/2$. Отсюда указанное выше условие для наибольшей величины $|\xi'|_{\max}$:

$$|\xi'|_{\max} = v \quad (340)$$

Несколько слов об источнике энергии для автоколебательной системы. Поскольку свободная частица не теряет энергии при своем движении, а только периодически отдает и получает обратно часть своей энергии близлежащим зонам эфира (вакуума), то такая автоколебательная система не нуждается, собственно говоря, в источнике энергии, нужна только некоторая энергетическая "емкость", которая, то "заряжается" энергией, полученной от частицы, то "разряжается" на частицу.

Образно говоря, свободно движущаяся частица как бы погружена в своего рода эфирный пульсирующий "пузырь". Пульсации этого пузыря связаны с колебаниями самой частицы. Пузырь и частица образуют автоколебательную саморегулирующуюся систему. Если частица попадает в поле других частиц, то может образоваться стационарная автоколебательная система, вообще говоря, с целым набором стационарных энергетических состояний. В такой системе частицы и соответствующий системе "пузырь" будет совершать весьма сложные, но каждый раз вполне определенные движения.

§ 3. Механическая модель квантового движения частицы.

Простое решение, которое мы получили для квантового движения частицы, движущейся с постоянной классической скоростью, подсказывает возможность создания механической модели квантового движения, "Частицей" в этой модели может служить скат из двух дисков на котором эксцентрично укреплены два куска проволоки, имитирующие квантовый "пузырь", т. е. область

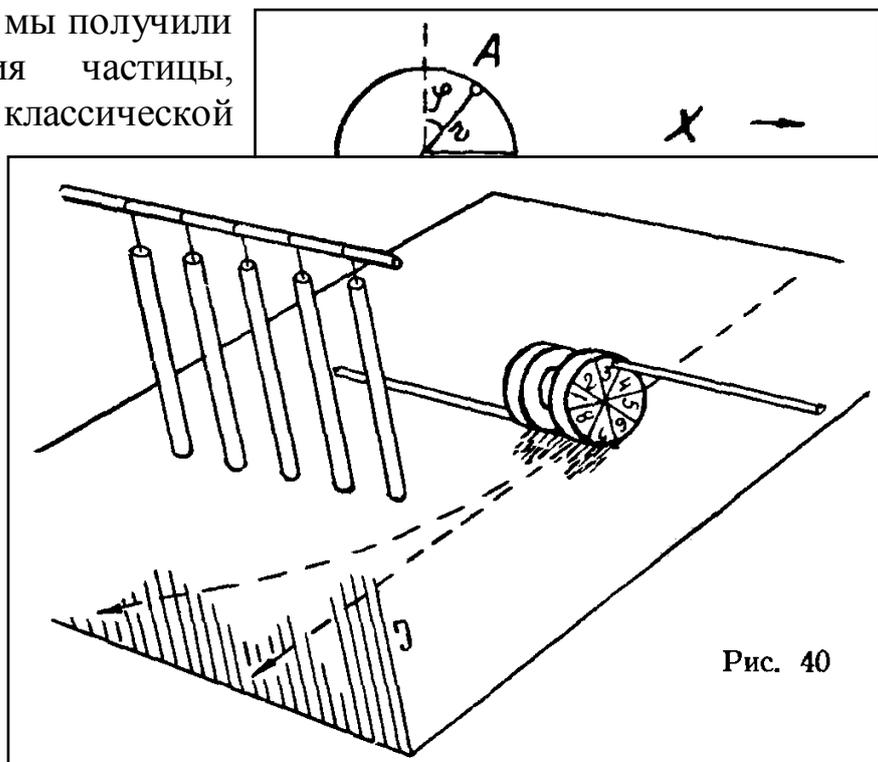


Рис. 40

действия квантовых сил (рис. 39, 40).

Если следить за движением проекции точки прикрепления проволоки к диску на линию движения оси ската, то мы получим те же уравнения, которые имели для движения квантовой частицы. Действительно, пусть координата оси ската как функция времени выражается формулой $x = vt$, тогда координата проекции точки A будет (рис. 39)

$$x^* = x + \xi = vt + r \sin \omega t; \quad (341)$$

здесь

$$\xi = r \sin \varphi = r \sin \omega t, \quad \omega = \dot{\varphi}.$$

Далее

$$\dot{x}^* = v + r\omega \cos \omega t, \quad (342)$$

$$\ddot{x}^* = \ddot{\xi} = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 \xi.$$

Такое движение требует наличия силы, которая может быть описана с помощью потенциальной функции

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2} \kappa \xi^2. \quad (343)$$

Минимум этой функции находится в месте пребывания оси ската и перемещается вместе с ней вдоль направления x со скоростью v . Отсюда

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\kappa \xi. \quad (344)$$

Сравнение с уравнениями (342) показывает, что $k = \omega^2 m$.

Для наблюдателя в неподвижной системе координат эта функция будет выглядеть, как функция $\psi(x, t)$. Очевидно,

$$\left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x^*} = \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} = \kappa \xi; \quad \left. \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x^*} = \kappa. \quad (345)$$

Так как $\Psi(\xi)$ во времени меняется только за счет перемещения ямы со скоростью v по оси x -ов, то

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{x^*} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x^*} \cdot \frac{dx}{dt} = \kappa \xi \cdot v \quad (346)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x^*} = \left. \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x^*} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \kappa v^2. \quad (347)$$

Если последнюю производную разделить на v^2 , то она будет равна производной $\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$. Таким образом, для функции $\psi(x, t)$ получается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}. \quad (348)$$

Получается интересная ситуация: хотя никаких волн нет, но описать явление можно с помощью волнового уравнения. Причем это будет не только формальным фокусом: наша "частица" (отнюдь не микроскопическая!) может диффрагировать! Для этого наш скат мы пускаем

по слегка наклонной плоскости (проволочки в этом случае будут двигаться не по синусоиде, а по циклоиде, но это различие не принципиальное). На пути ската мы ставим препятствие в виде подвешенных в ряд коротких хлорвиниловых трубок. Результат "рассеяния частиц" будет зависеть от того, какая часть проволочки столкнется с препятствием и с какой фазой она подойдет к нему. Пуская диск по путям 1, 2, 3... и на каждом пути перебирая определенные начальные фазы, мы фиксируем число раз прибытия ската к отрезкам, намеченным на краю плоскости (на экране). Картина получается типично диффракционная (рис. 40).

Этот опыт наглядно демонстрирует необходимость осторожного пользования такими теоретическими абстракциями, как волна и частица, поскольку может иметь место такая ситуация, когда мы имеем дело и не с волной, и не с "просто частицей", а с дискретным объектом, но имеющим внутренние периодические движения, внутреннюю фазу.

§ 4. Автоколебательное движение частицы в прямоугольном потенциальном ящике.

В таком ящике частица в промежутках между ударами о стенки движется, как свободная частица, однако решение ν -уравнения для этого случая имеет вид ([§ 2, гл. 3](#))

$$\Phi = A \cos \frac{\pi n}{L} x \cdot \cos \frac{\pi n^2 h}{2mL^2} t; \quad (349)$$

здесь L - ширина ямы, $\frac{\pi n^2 h}{2mL^2} = \omega$ - частота квантовых колебаний, т. е. система волн уже определяется наличием ящика. По этому решению можем написать уравнение квантового движения частицы¹

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x^*} \quad (350)$$

или подробно

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = A \frac{\pi n}{L} \sin \left[\frac{n\pi}{L} (x_{\text{кл}} + \xi) \right] \cdot \cos \frac{\pi n^2 h}{2mL^2} t. \quad (351)$$

Для решения в качестве первого приближения отбрасываем ξ в правой части уравнения. Тогда уравнение примет вид

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = A \frac{\pi n}{2L} \sin 2\omega t, \\ x_{\text{кл}} = vt = \sqrt{2 \frac{E - V_0}{m}} t = \frac{nh}{2mL} t, \quad (352)$$

и решение его будет:

¹ Амплитуда a_1 определяется по формуле (324), но только ξ_{max} приравнивается средней скорости электрона в состоянии E_1

$$\xi = -\frac{A n \pi}{8 \omega^2 m L} \sin 2 \omega t, \quad (353)$$

$$\dot{\xi} = -\frac{A \pi n}{4 \omega m L} \cos 2 \omega t. \quad (354)$$

Амплитуду ψ -функции A можно определить из соотношения неопределенности

$$\Delta \xi \cdot \Delta m \dot{\xi} = \frac{h}{2\pi}. \quad (355)$$

Считаем по-прежнему, что $|\dot{\xi}'|_{\max} = v$. Отсюда

$$|\dot{\xi}|_{\max} = \frac{A \pi n}{4 \omega m L} = v, \quad A = \frac{8 m^2 v^3 L}{h \cdot n}. \quad (356)$$

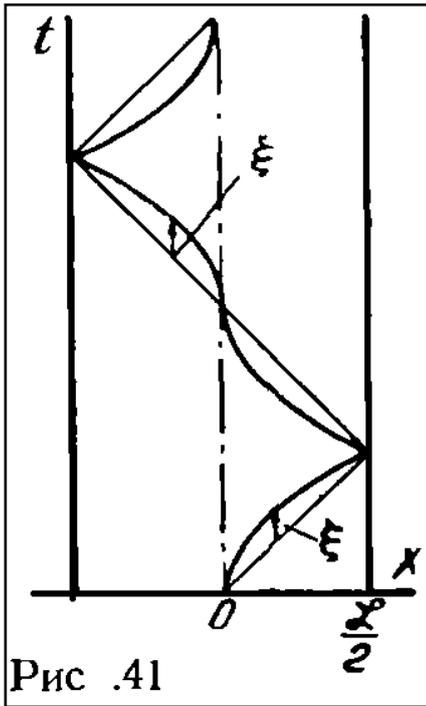


Рис .41

$$\left. \begin{array}{l} \text{Для } n=1 \quad L = \frac{\lambda}{2} = \frac{h}{2m v} \\ \text{Для } n=2 \quad L = \lambda = \frac{h}{m v} \\ \text{Для } n=3 \quad L = \frac{3}{2} \lambda = \frac{3h}{2m v} \end{array} \right\} A = 4m v^2 \text{ и т. д.}$$

Поскольку $\Delta m \dot{\xi}_{\max} = 2m v$, то

$$\Delta \xi = \frac{h}{4\pi m v}, \quad \xi_{\max} = \frac{h}{8\pi m v}. \quad (357)$$

Таким образом, для результирующего движения получим

$$x^* = v t - \frac{\lambda}{4\pi} \sin 2 \omega t,$$

$$\dot{x}^* = v (1 - \cos 2 \omega t). \quad (358)$$

Траектория такого движения представлена на рис. 41 для случая $n = 1$.
Здесь

$$T_{кл} = \frac{2L}{v} = \frac{h}{m v^2}, \quad T_{кв} = \frac{h}{m v^2}, \quad \omega_{кв} = \frac{2\pi m v^2}{h}. \quad (359)$$

§ 5. Автоколебания в s-состояниях атома водорода.

Рис. 41, на котором изображена квантовая траектория частицы в прямоугольном потенциальном ящике, наглядно показывает, что и в потенциальных ямах более сложного вида для существования автоколебательного движения необходимо, чтобы период классического движения был кратным периода квантового движения. В противном случае, конечно, не будет согласования колебаний стоячих волн и движения частицы, которое должно в "среднем" следовать классической траектории, но на границах ямы не выходить за ее пределы.

Рассмотрим с этой точки зрения случай s-состояний атома водорода. Классическое движение электрона в s-состоянии описывается уравнением

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{e^2}{r^2}. \quad (360)$$

Отсюда

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{-\frac{2E}{m}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1 - \frac{e^2}{E} \cdot \frac{1}{r}}} \quad (361)$$

и

$$t = \frac{\sqrt{-1 - \frac{e^2}{E} \cdot \frac{1}{r}}}{\sqrt{-\frac{2E}{m} \cdot \frac{1}{r}}} - \frac{e^2}{E \sqrt{-\frac{2E}{m}}} \operatorname{arctg} \sqrt{-1 - \frac{e^2}{E} \cdot \frac{1}{r}}. \quad (362)$$

Так как $r_{кр} = -e^2/E$, то

$$-\frac{E}{e^2} \sqrt{-\frac{2E}{m}} t = \frac{r}{r_{кр}} \sqrt{\frac{r_{кр}}{r} - 1} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_{кр}}{r} - 1}. \quad (363)$$

Начало отсчета времени $t=0$ берем при $r=r_{кр}$. Полный период будет равен сумме времени падения и отскока. Отсюда

$$T_{кл} = -\frac{\pi e^2}{E \sqrt{-\frac{2E}{m}}};$$

$$\omega_{кл} = \frac{2\pi}{T_{кл}} = -\frac{2E}{e^2} \sqrt{-\frac{2E}{m}}. \quad (364)$$

Квантовая частота

$$\omega_{кв} = -\frac{4\pi E}{h}. \quad (365)$$

Подставим в выражения для частот квантовую энергию атома водорода

$$E = E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 n^2}. \quad (366)$$

Тогда

$$\omega_{кв} = \frac{8\pi^3 m e^4}{h^3 n^2}; \quad \omega_{кл} = \frac{8\pi^3 m e^4}{h^3 n^3}. \quad (367)$$

Отношение частот и периодов будет

$$\frac{\omega_{кв}}{\omega_{кл}} = n = \frac{T_{кл}}{T_{кв}}, \quad n = 1, 2, 3, 4 \dots \quad (368)$$

Таким образом, условие кратности периодов соблюдается и в такой системе может существовать автоколебательное движение.

Далее мы рассмотрим более подробно автоколебания в основном состоянии атома водорода. Решение ν -уравнения для основного состояния атома водорода ($n=1$) имеет вид

$$\psi = - \frac{e^2}{r \cdot E_1} \cdot e^{-\frac{2F}{e^2} r} \cdot a_1 \left(1 + \frac{r E_1}{e^2}\right) \cdot \cos \frac{4\pi E_1}{h} t. \quad (369)$$

Отсюда уравнение квантового движения для электрона в этом состоянии

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r^*}$$

или, точнее,

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \frac{a_1 e^2}{r^* \cdot E_1} \cdot e^{-\frac{2E_1}{e^2} r^*} \left[\frac{2E_1}{e^2} \left(1 + \frac{r^* E_1}{e^2}\right) + \frac{1}{r^*} \right] \cdot \cos \frac{4\pi E_1}{h} t. \quad (370)$$

Здесь под координатой r^* понимается, как обычно, сумма классической координаты и квантового сдвига

$$r^* = r_{\text{кл}} + \xi.$$

Решение уравнения классического движения электрона в s-состоянии (360) для $n = 1$ можно записать в виде

$$-\frac{4\pi E_1}{h} t = 2 \frac{r}{r_{\text{кр}}} \sqrt{\frac{r_{\text{кр}}}{r} - 1} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_{\text{кр}}}{r} - 1}, \quad (371)$$

где $r_{\text{кр}} = -\frac{e^2}{E}$

Таким образом, мы не можем даже в явном виде подставить в наше уравнение квантового движения $r_{\text{кл}}$. Замена переменной t на $r_{\text{кл}}$ также не упрощает уравнения движения. Попробуем упростить уравнение, отбрасывая в правой части ξ , Тогда получим $r^* = r_{\text{кл}}$ и

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{a_1 e^2}{r_{\text{кр}}} \cdot \frac{r_{\text{кр}}}{r} \left[-2 \left(1 - \frac{r}{r_{\text{кр}}}\right) + \frac{r_{\text{кр}}}{r} \right] \cdot \cos \frac{4\pi E_1}{h} t. \quad (372)$$

Отсюда

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \frac{a_1 h}{m r_{\text{кр}} 4\pi E_1} \int_0^y \frac{e^{2x}}{x} \left[-2(1-x) + \frac{1}{x} \right] \cdot \cos y \cdot dy \quad (373)$$

и

$$\xi = \frac{a_1}{m r_{\text{кр}}} \left(\frac{h}{4\pi E_1} \right)^2 \int_0^y \varphi(y) dy. \quad (374)$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{r}{r_{\text{кр}}} = x, \quad f(x) = \frac{e^{2x}}{x} \left[-2(1-x) + \frac{1}{x} \right], \quad (375)$$

$$f(x) \cdot \cos y = F(y); \int_0^y F(y) dy = \varphi(y),$$

$$y = 2x \sqrt{\frac{1}{x} - 1} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{x} - 1}.$$

Интегралы приходится вычислять графически (рис. 42 и 48). Зависимость ξ от y показана на рис. 44. Движение электрона изображено на рис. 45. Сплошная линия показывает классическое движение, пунктирная линия показывает результирующее (классическое + квантовое) движение электрона. В то время как классическое движение является только падением электрона на протон, результирующее движение является периодическим движением: электрон "падает" теперь более медленно, чем в классическом случае, зато создает противодействующую силу, которая отбрасывает его на исходную позицию. К сожалению, этот момент требует более точных вычислений. Что дело обстоит именно так, подтверждают еще следующие выкладки. Если построить график для величины кулоновской силы, действующей на электрон, и квантовой силы (беря $\cos y = 1$), основываясь на формулах

$$F_{\text{кул}} = \frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{r_{\text{кр}}^2 x^2} = \frac{E^2}{e^2 x^2}, \quad (376)$$

$$\begin{aligned} F_{\text{кв}} &= m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{a_1}{r_{\text{кр}}} \cdot \frac{e^{2x}}{x} \left[-2(1-x) + \frac{1}{x} \right] = \\ &= \frac{E_1^2}{e^2} \frac{e^{2x}}{x} \left[-2(1-x) + \frac{1}{x} \right], \\ & \quad a_1 = E_1 \end{aligned} \quad (377)$$

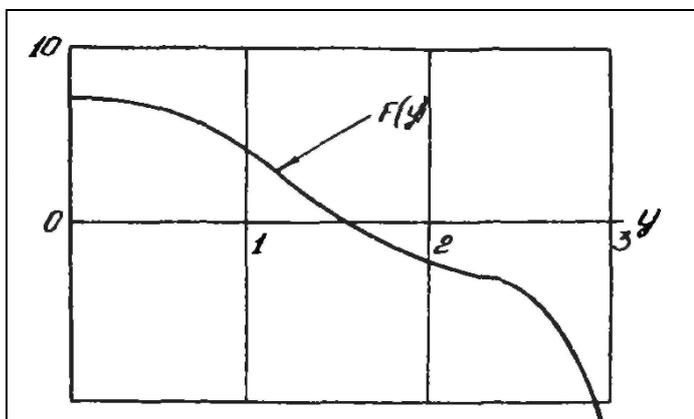


Рис. 42

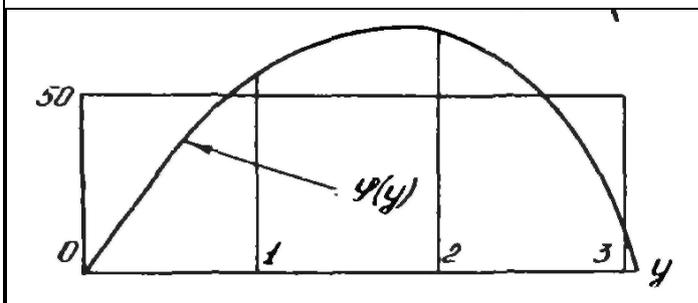


Рис. 43

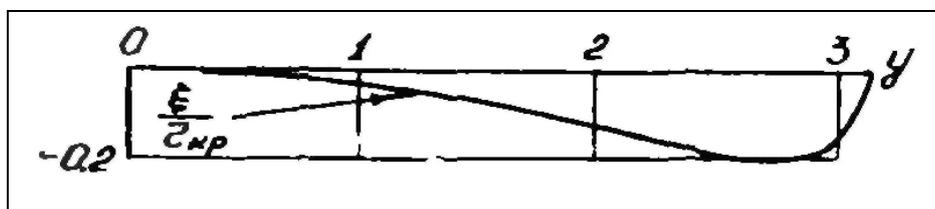


Рис. 44

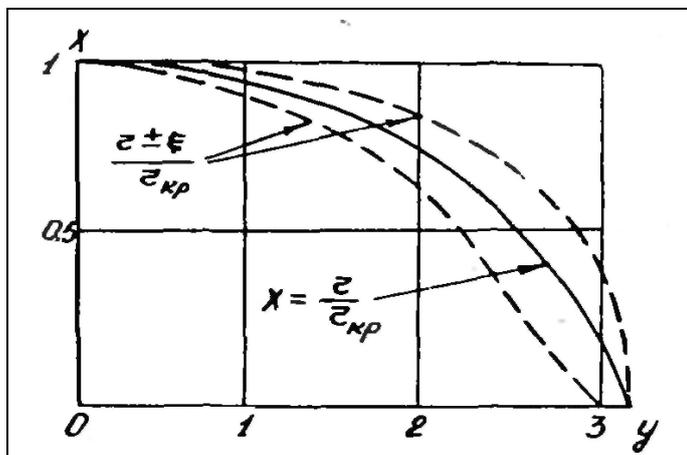


Рис. 45

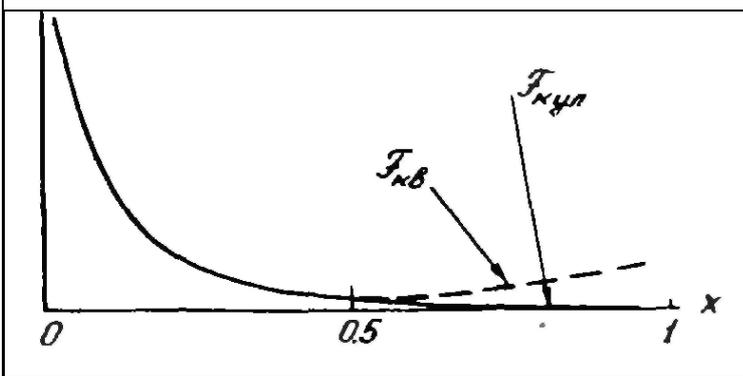


Рис. 46

(при определении $a_1/|\xi'|_{\max} = v$ в состоянии E_1), то увидим, что как раз около протона квантовая сила делается способной противоборствовать с кулоновской силой притяжения (рис. 46).

Мы рассмотрели автоколебательное движение электрона в самом простом случае s -состояний при $n = 1$. Если $n > 1$, даже s -состояния анализировать очень трудно. Еще больше возрастают трудности анализа движений электрона при $l \neq 0$, так как в этом случае придется принимать во внимание не только силы, описываемые скалярным квантовым потенциалом, но и силы, описываемые векторным квантовым потенциалом, которые действуют подобно магнитным силам в зависимости от ориентировки вектора квантового потенциала и скорости частицы.

§ 6. Автоколебания в дейтероне.

Поскольку о возможности автоколебательных движений в атомной системе можно судить, прежде всего, по кратности классического и квантового периодов, мы вычислим классический период дейтерона. Мы имели ([§ 7, гл. III](#))

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{1}{m} \left(E + V_0 \frac{e^{-\mu^2 r}}{1 - e^{-\mu^2 r}} \right)}. \quad (378)$$

Делаем замену $x = 2r$, $\dot{r} = \frac{\dot{x}}{2}$, тогда

$$\dot{x} = 2 \sqrt{\frac{1}{m} \left(E + V_0 \frac{e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu x}} \right)}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dx}{2 \sqrt{\frac{1}{m} \left(E + V_0 \frac{e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu x}} \right)}} = t + C. \quad (379)$$

Для вычисления интеграла делаем следующие замены:

$$e^{\mu x} = z, \quad u = \frac{1}{z - 1}, \quad (380)$$

после чего получим

$$t + C = -\frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{m}{V_0}} \left[\int \frac{du}{u \sqrt{u - a}} - \int \frac{du}{(1 + u) \sqrt{u - a}} \right]; \quad a = -\frac{E}{V_0}$$

и окончательно

$$-t_{\text{кон}} = -\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{m}{V_0}} \left[\frac{1}{\sqrt{-\frac{E}{V_0}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{1}{e^{\mu x} - 1} + \frac{E}{V_0}}}{\sqrt{-\frac{E}{V_0}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E}{V_0}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{1}{e^{\mu x} - 1} + \frac{E}{V_0}}}{\sqrt{1 - \frac{E}{V_0}}} \right]_{x_0}^{x_{\text{кр}}} \quad (381)$$

Поскольку крайнее значение координаты x определяется формулой

$$\frac{1}{e^{\mu x_{\text{кр}}} - 1} = -\frac{E}{V_0}, \quad (382)$$

то период $T_{\text{кл}}$ выразится в виде

$$T_{\text{кл}} = \frac{\pi}{\mu} \sqrt{\frac{m}{V_0}} \left[\frac{\sqrt{1 - \frac{E}{V_0}} - \sqrt{-\frac{E}{V_0}}}{\sqrt{-\frac{E}{V_0}} \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}}} \right]. \quad (383)$$

Классическая частота будет

$$\omega_{\text{кл}} = \frac{2\pi}{T_{\text{кл}}} = \frac{2\mu}{\sqrt{\frac{m}{V_0}}} \frac{\sqrt{-\frac{E}{V_0}} \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}}}{\left[\sqrt{1 - \frac{E}{V_0}} - \sqrt{-\frac{E}{V_0}} \right]}. \quad (384)$$

Для квантовой частоты мы имели

$$\omega_{\text{кв}} = \frac{4\pi V_0}{h} \sqrt{-\frac{E}{V_0}} \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}}. \quad (385)$$

Для единственного энергетического уровня дейтерона было выражение (234)

$$-E_0 = \frac{V_0^2 \pi^2 m}{h^2 \mu^2} - \frac{V_0}{2} + \frac{\mu^2 h^2}{16\pi^2 m}. \quad (386)$$

Если подставить в формулы для частот энергию в таком виде, то ничего о кратности частот сказать нельзя, так как остается неопределенной связь между параметрами V_0 и μ . Однако если считать, что следующий уровень как раз лежит на нуле, то

$$V_0 = \frac{h^2 \mu^2}{\pi^2 m} \quad (387)$$

(см. формулу (233)). Тогда и для основного уровня энергии получается простое выражение

$$-E_0 = \frac{9}{16} \frac{h^2 \mu^2}{\pi^2 m}. \quad (388)$$

С такими значениями V_0 , E получим

$$1 - \frac{E}{V_0} = \frac{25}{16}, \quad -\frac{E}{V_0} = \frac{9}{16}. \quad (389)$$

Подставляя эти величины в выражения для частот, получим

$$\omega_{\text{кв}} = \frac{15}{4} \frac{\mu^2 h}{\pi m} = \omega_{\text{кв}}. \quad (390)$$

Таким образом, в системе могут существовать автоколебания. Свойство кратности частот дает возможность однозначно определять значения параметров V_0 и μ . Действительно, из формулы (388) можно определить параметр μ по известному значению энергии связи дейтерона - $E_0 = 2,226$ МэВ. Для массы m берем ее значение для протона $m = 1,67 \cdot 10^{-24}$ г.

Для μ получаем $\mu = 1,543 \cdot 10^{12}$. Отсюда определяется и V_0 :

$$V_0 = \frac{h^2 \mu^2}{\pi^2 m} = 6,33 \cdot 10^{-6} \text{ эрг.}$$

Из формулы (382) получаем значение для $x_{\text{кр}} = 6,617 \cdot 10^{-13}$ и для радиуса дейтерона $R = r_{\text{кр}} = x_{\text{кр}}/2 = 3,308 \cdot 10^{-13}$ см., что хорошо согласуется с принятыми значениями [10].

Расчет квантового движения ведется аналогично тому, как это было проделано для основного состояния атома водорода.

§ 7. О системах, для которых не выполняется условие кратности классической и квантовых частот.

Примером такой системы может служить гармонический осциллятор, для которого классическая частота $\omega_{\text{кл}} = (k/m)^{1/2}$, квантовая же частота $\omega_{\text{кв}} = (k/m)^{1/2} (n(n+1))^{1/2}$.

Таким образом, из-за иррациональности $(n(n+1))^{1/2}$ квантовая координата ξ не будет находиться в постоянном фазовом отношении с классической координатой x , поэтому не будут выполняться и условия на границах, когда обязательно ξ должно равняться нулю (рис. 47). Эта неувязка является следствием того, что линейный закон сил является грубо приближенным. Это очевидно хотя бы уже из того, что сила для двухатомной молекулы (моделью которой является обычно гармонический осциллятор) обязана своим происхождением взаимодействию электронных оболочек атомов и ясно, что она не может линейно меняться с расстоянием даже на небольших участках этого расстояния [19].

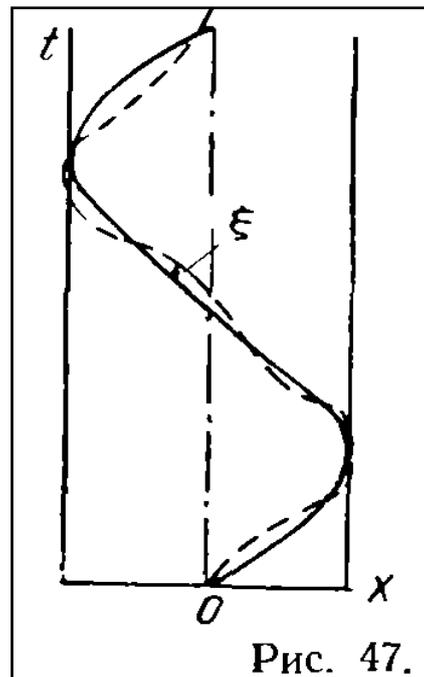


Рис. 47.

Поскольку u - и v -уравнения являются следствием основных соотношений специальной теории относительности, то для точных законов сил оба эти уравнения должны давать одинаковое квантование энергии атомных систем (под атомными системами мы понимаем все системы, закономерности которых определяются постоянной Планка h). Для гармонического осциллятора имеется расхождение в уровнях энергии, определяемой по обоим уравнениям. Следствием неточности закона сил является и характер ψ -функции v -уравнения и связанное с ней квантовое движение осциллятора, которое не согласуется с классическим движением его. То, что мы можем формально решить u - и v -уравнения и получить какие-то уровни энергии, ни о чем еще не говорит: не каждый закон сил, созданный фантазией теоретика, обязан согласоваться с законами природы. Когда монополюбно царствовала обычная квантовая механика, не было критерия для отбора законов сил, которые могут существовать в атомном мире. Существование второй квантовой механики позволяет разумно ограничить выбор закона сил для той или иной модели квантового объекта, считая правильным законом сил только тот, для которого квантование по обоим механикам будет одинаково.

Нужно заметить, что для прямоугольной ямы (§ 2, гл. 3), которая явно не изображает правильный закон сил, мы получили кратность частот, но это произошло из-за того, что там классическая частота определяется только размерами ямы, квантовая же частота определяется требованием существования стоячих синусоидальных волн, т. е. снова размерами ямы.

§ 8. Управление в атомных системах.

Автоколебательная система должна быть системой самоуправляющейся. Можно показать, что принципы, имеющие место для технических управляемых систем, справедливы и для квантовых систем, рассматриваемых как самоуправляющиеся системы. Далее мы перескажем некоторые места из книги [20] применительно к конкретной атомной системе, за которую возьмем свободно движущуюся частицу.

Пусть рассматривается поведение атомного объекта, состояние которого в каждый момент времени характеризуется действительными числами $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$ (координатами и скоростями). При движении объекта переменные $x^1 \dots x^n$ меняются с течением времени. В случае свободной частицы эти переменные сводятся к квантовым координате $\xi = \xi^1$ и скорости $\dot{\xi} = \dot{\xi}^2$. Эти координаты "управляются" некоторыми "рулями", от положения которых зависит движение объекта. Положение "рулей" характеризуется точками u некоторой области управления U . Задание точки $u = (u^1, u^2 \dots u^r) \in U$ равносильно заданию системы числовых параметров $u^1, u^2 \dots u^r$. Этими параметрами для атомного объекта являются его классические координаты и скорости. Для свободной частицы это будет ее классическая координата $u^1 = x$ и скорость $u^2 = v$. Между управляющими параметрами могут существовать связи, выражающиеся одним или несколькими уравнениями вида $\varphi(u^1, u^2 \dots u^r) = 0$. Для атомной системы это будут классические уравнения движения.

Предположим, что закон движения объекта (закон воздействия "рулей" на это движение) записывается в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r, t) = f^i(x, u, t), \quad (391)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

Для свободной частицы это будет

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{A \omega^2}{m v^2} \xi = 0$$

или в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{d \xi^1}{dt} = \xi^2 = f^1, \quad (392)$$

$$\frac{d \xi^2}{dt} = -\Omega^2 \xi^1 = f^2;$$

здесь

$$\Omega = \frac{8\pi m v^2}{h} = 4\omega_{\text{кв}}.$$

Вводим новую координату

$$x_1^0 = \int_{t_0}^t f^0(x(t), u(t), t) dt. \quad (393)$$

Тогда система (391) запишется в виде

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad i=0,1,2,\dots,n. \quad (394)$$

Вводим еще одно вспомогательное неизвестное x^{n+1} , изменяющееся по закону $\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1$, $x^{n+1}(t_0) = t_0$. Другими словами, $x^{n+1} = t$. С помощью неизвестного x^{n+1} систему (394) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= f^i(x, u, x^{n+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n \\ \frac{dx^{n+1}}{dt} &= 1. \end{aligned} \quad (395)$$

Для нашего случая имеем:

$$\xi^0 = t - t_0, \quad f^0(x, u, t) \equiv 1, \quad \frac{d\xi^0}{dt} = f^0 = 1, \quad \xi^3 \equiv t. \quad (396)$$

Кроме основной системы уравнений (395) рассмотрим еще одну систему уравнений относительно вспомогательных переменных $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i}{dt} &= - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha(x, u, t)}{\partial x^i} \cdot \psi_\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, n \\ \frac{d\psi_{n+1}}{dt} &= - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} \psi_\alpha. \end{aligned} \quad (397)$$

Для нашего случая она запишется полностью, как

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= - \left(\frac{\partial f^0}{\partial \xi^1} \psi_0 + \frac{\partial f^1}{\partial \xi^1} \psi_1 + \frac{\partial f^2}{\partial \xi^1} \psi_2 \right) = \Omega^2 \psi_2; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= - \left(\frac{\partial f^0}{\partial \xi^2} \psi_0 + \frac{\partial f^1}{\partial \xi^2} \psi_1 + \frac{\partial f^2}{\partial \xi^2} \psi_2 \right) = -\psi_1; \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= - \left(\frac{\partial f^0}{\partial t} \psi_0 + \frac{\partial f^1}{\partial t} \psi_1 + \frac{\partial f^2}{\partial t} \psi_2 \right) = 0; \\ \frac{d\psi_0}{dt} &= - \left(\frac{\partial f^0}{\partial \xi^0} \psi_0 + \frac{\partial f^1}{\partial \xi^0} \psi_1 + \frac{\partial f^2}{\partial \xi^0} \psi_2 \right) = 0; \\ \frac{\partial f^0}{\partial \xi^1} &= 0, \quad \frac{\partial f^1}{\partial \xi^1} = 0, \quad \frac{\partial f^2}{\partial \xi^1} = -\Omega^2, \\ \frac{\partial f^0}{\partial \xi^2} &= 0, \quad \frac{\partial f^1}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial f^2}{\partial \xi^2} = 1, \\ \frac{\partial f^0}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial f^1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f^2}{\partial t} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial \xi^0} = 0, \quad \frac{\partial f^1}{\partial \xi^1} = 0, \quad \frac{\partial f^2}{\partial \xi^2} = 0.$$

Объединим системы (395) и (397). Для этого введем следующую функцию H переменных $x', \dots, x^n, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, u^1, \dots, u^r$

$$H(\vec{\psi}, x, u, t) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(x, u, t), \quad (399)$$

удовлетворяющую уравнениям

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (400)$$

Согласно принципу максимума (см. [20]) (вдоль оптимальной траектории тождество $f^0(x, u, t) \equiv 1$ показывает, что оптимальность управления $u(t)$ означает минимальность времени перехода из положения $x_0(t=0)$ в положение $x(t)$, для нашего примера – из ξ_0 в ξ) выполняется соотношение

$$H(\psi(t), x(t), t, u(t)) \equiv -\psi_{n+1}(t) \quad (401)$$

или для нашего случая

$$\psi_0 + \psi_1 \xi^2 - \psi_2 \Omega^2 \xi' = -\psi_3. \quad (402)$$

Так как из уравнений (398) можно получить

$$\psi_0 = C_1, \quad \psi_3 = C_3, \quad \psi_2 = C_2 \sin \Omega t, \quad \psi_1 = -C_2 \Omega \cos \Omega t, \quad (403)$$

то

$$C_1 + C_3 - C_2 \Omega \cos \Omega t \cdot \xi^2 - C_2 \Omega^2 \sin \Omega t \cdot \xi' = 0 \quad (404)$$

или в обычных обозначениях

$$-(C_1 + C_3) + C_2 \Omega \cos \Omega t \cdot \frac{d\xi}{dt} + C_2 \Omega^2 \sin \Omega t \cdot \xi = 0, \quad (405)$$

иначе

$$\frac{d\xi}{dt} + \frac{\Omega \sin \Omega t}{\cos \Omega t} \xi = \frac{C_1 + C_3}{C_2 \Omega \cos \Omega t}. \quad (406)$$

Отсюда

$$\xi = C \sin \Omega t = C \sin 4\omega_{KB} t. \quad (407)$$

Таким образом, для квантовой координаты получается выражение, полученное ранее (§5 настоящей главы). Этим самым подтверждается наш основной тезис: классическое движение управляет квантовым движением и законы этого управления даются автоколебательной квантовой механикой.

§ 9. Волна де Бройля для макрообъектов.

Иногда встречаются утверждения, что выражение волны де Бройля пригодно и имеет смысл для любых масс и скоростей. С точки зрения автоколебательной квантовой механики это не так. Квантовое движение требует, чтобы около частицы мог существовать "пузырь", т. е. область

пространства, с которой взаимодействует квантовая частица. Отсюда вытекает, что для каждого объекта должна существовать минимальная длина волны де Бройля, равная по величине его геометрическим размерам.

Рассмотрим, например, шарик из воды с радиусом в 1 см. Тогда минимальная длины волны будет порядка 2 см. и это будет иметь место при скорости, равной по величине постоянной Планка, т. е. 10^{-27} см/с! Другими словами, для такого объекта понятие длины волны де Бройля теряет физический смысл.

Возьмем теперь электрон. Для него $r \sim 10^{-13}$ см, $m_0 = 9 \cdot 10^{-28}$ г, плотность $\rho = 2 \cdot 10^{11}$ г/см³. Для минимальной длины волны можно написать формулу

$$l = \frac{h \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{4e^3 \rho v}.$$

Беря для l величину порядка радиуса r , для скорости получим величину порядка скорости света.

Таким образом, квантовая механика должна иметь дело с объектами, для которых минимальная длина волны де Бройля получается при скоростях, близких к скорости света. Поэтому переход от макрообъектов к микрообъектам является не только количественным, но и качественным переходом. Электрон в атоме водорода не копирует движение планеты вокруг Солнца, его движение гораздо сложнее из-за непрерывного и сильного взаимодействия со средой.

Тем самым и все наши построения, связанные с двумя скоростями частиц, справедливы только на уровне микромира.

§ 10. Можно ли ψ -функцию u -уравнения истолковать механически?

Для свободной частицы мы можем и для u -уравнения написать

$$\psi_u = A \cos \omega_u \left(t - \frac{x}{u} \right). \quad (408)$$

Однако здесь

$$\omega_u = \frac{2\pi mc^2}{h}, \quad u = \frac{c^2}{v}.$$

Так как

$$\frac{\omega_u}{u} = \frac{2\pi mc^2}{h} \cdot \frac{v}{c^2} = \frac{\omega_v}{v} \quad (409)$$

то

$$\frac{\omega_u}{\omega_v} = \frac{u}{v} = \frac{c^2}{v^2} \gg 1 \quad (410)$$

Поэтому если положить, что $x^* = x_{кл} + \xi_u$ и написать для ξ_u уравнение, подобное уравнению, которым мы пользовались в этой главе, т. е.

$$m \frac{d^2 \xi_u}{dt^2} = - \left. \frac{\partial \phi_u}{\partial x} \right|_{x^*} = - \frac{2\pi mc^2}{h} A \sin \omega_u \left(t - \frac{x}{u} \right) \Big|_{x^*}, \quad (411)$$

то на первый взгляд получается нечто аналогичное автоколебательной квантовой механике. Достаточно, однако, расписать выражение для $\sin \omega_u(t - x/u)$, подставив вместо x выражение $x = vt$:

$$\sin \omega_u \left(t - \frac{x}{u} \right) = \sin \omega_u t \cdot \cos \omega_v t - \cos \omega_u t \cdot \sin \omega_v t, \quad (412)$$

чтобы увидеть, что множитель $\sin \omega_u t$ и $\cos \omega_u t$ превращают фактически все выражение в нуль из-за того, что $\omega_u \gg \omega_v$. Тем самым ликвидируется и соответствующая "квантовая сила". Поэтому для обычной нерелятивистской квантовой механики механическое истолкование ничего не дает и более подходящим является статистическое толкование. Однако для случая релятивистского ω_u делается сравнимым с ω_v и механическое толкование может иметь смысл. Весьма возможно, что для релятивистских задач необходимо одновременно привлекать к рассмотрению обе механики, предварительно, конечно, избавив обычную квантовую механику от тех условий, которые превращают ее в статистическую механику (см. [§ 6, гл. II](#)).

Глава VI

НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ СЛЕДСТВИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Молекулы и комплексы молекул и атомов как резонаторы для квантовых волн.

При работе с электронным автоэмиссионным микроскопом очень часто на экране микроскопа наблюдаются образования, подобные изображенным на рис. 48.

Распределение интенсивностей в пятнах аналогично распределению таковой для света, прошедшего через прозрачные нити или для амплитуд ультразвуковых колебаний, прошедших через упругие стержни. Это навело А. П. Комара и А. А. Комара [21,

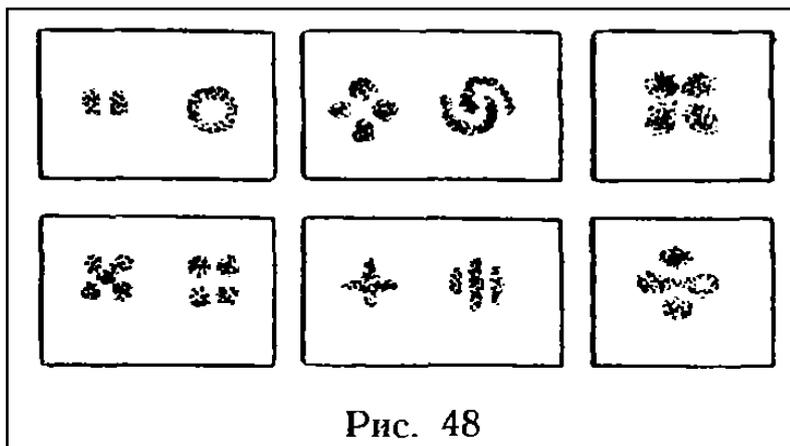


Рис. 48

22] на мысль, «что в случае испускания электронов молекулами дело сводится к канализации электронных волн молекулами». Если считать, что комплекс молекул образует цилиндрическую полость с осью вдоль градиента внешнего электрического поля, то для электронов создается ситуация, подобная ситуации для электромагнитных волн в цилиндрическом волноводе, при условии, что с электроном обращаться как с волной, подчиняющейся волновому уравнению Шредингера. Поскольку в данном случае речь идет об индивидуальном атомном образовании, причинно связанным с пятном на экране, которое видно только в продолжении времени существования данного образования, то ясно, что уравнение Шредингера не может объяснить, например, фигурки в виде двойной спирали, так как на ψ -функцию наложено вероятностное толкование. Другие фигурки оно объясняет только потому, что оно имеет подходящую математическую структуру, т. е. является волновым уравнением. Именно потому, что речь идет об индивидуальной атомной системе, здесь нужно применять не обычную квантовую механику, а автоколебательную квантовую механику. С точки зрения этой квантовой механики электроны, вгоняемые внешним электрическим полем в полость между молекулами, возбуждают в этой полости реальные стоячие квантовые волны той же природы, как и в атоме водорода. Подчеркиваем еще раз: не волны вероятности, описываемые уравнением Шредингера, а квантовые волны, реальные в той же степени, как реальны волны электромагнитные. Вероятнее всего эта система будет похожа на трубу с открытым концом, в

которой может существовать стоячая волна с пучностью на открытом конце. Равенство Ψ -функции нулю на боковых стенках полости — наше обычное условие, которое, кстати говоря, дает правильные результаты и с уравнением Шредингера, хотя там оно взято искусственно.

Если электроны движутся вдоль оси полости, то возбуждаются волны, описываемые скалярным квантовым потенциалом. Уравнение для него без временного множителя будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} u = 0. \quad (414)$$

Полагая $u = R(r) Z(z) \Phi(\varphi)$, получим три уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^2 \Phi,$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{x^2}{v^2} Z, \quad (415)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\kappa^2 - x^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0,$$

где $\frac{\omega^2}{v^2} = \kappa^2$

Таким образом, решение полностью будет совпадать с решением, полученным в [21], со всеми следствиями из него, т. е. с объяснением всех фигурок, кроме двойной спирали.

Разберем теперь вторую возможность, даваемую v -уравнением, т. е. решение в виде векторного квантового потенциала. Физически такое решение получится для того случая, когда электроны будут двигаться по спирали вокруг продольной оси полости. Такое движение вполне возможно, так как "стенки" полости представляют собой электронные оболочки молекул (см., например, § 2 главы IV).

В простейшем случае векторный квантовый потенциал имеет только одну слагающую A_φ без зависимости от угла φ . Уравнение для A_φ без временного множителя будет

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\omega^2}{v^2} A_\varphi = 0. \quad (416)$$

Полагаем $A_\varphi = A(r) A(z)$. Тогда получаются два уравнения:

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -x^2 A(z),$$

$$\frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA(r)}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - x^2 - \frac{1}{r^2} \right) A(r) = 0. \quad (417)$$

A_φ должно иметь определенную периодичность по r и по z . Нужно

заметить, что в выражении [для] $\omega_{\text{кв}} = 2\pi\nu/\lambda$ [величины] ν и $\lambda = h/mv$ суть скорость и длина волны де Бройля в направлении спиральной траектории электрона, а в выражении [для] $\chi = 2\pi/\lambda_{\text{ZA}}$ [величина] λ_{ZA} - длина волны дебройлевского поля в z-направлении (но $\lambda_{\text{ZA}} \neq h/mv_z$).

Временной период будет в обоих случаях один и тот же, поэтому

$$\lambda = \nu T, \lambda_{\text{ZA}} = \nu_{\text{ZA}} T, \frac{\lambda}{\lambda_{\text{ZA}}} = \frac{\nu}{\nu_{\text{ZA}}}. \quad (418)$$

Отсюда

$$\chi = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu_{\text{ZA}}}; \kappa_1^2 = \frac{\omega^2}{\nu^2} - \chi^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu_{\text{ZA}}^2} \right). \quad (419)$$

(! Здесь и до конца параграфа – замена I_1 на J_1)

Решением уравнения Бесселя будет $A(r) = I_1(k_1, r)$. Значение k_1 определяется из равенства нулю функции $A(r)$ на боковой поверхности полости на радиусе R . В этом случае $k_1 R = 3,83$. Задание R определяет размеры полости вдоль оси z .

Если какие-то электроны возбудили такую волну, то последующие электроны будут испытывать со стороны этой волны квантовую силу. Поскольку волна векторная, мы можем обращаться с A_φ , как с соответствующей слагающей магнитного вектор-потенциала и ввести квантовый вектор $H_{\text{кв}}$, определяемый равенствами

$$H_{\text{кв}} = \text{rot } A_\varphi = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \left(\frac{A_\varphi}{r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_z. \quad (420)$$

Величина квантовой силы в направлении угла φ будет пропорциональна произведению

$$F_\varphi = \dot{\nu}_z H_r. \quad (421)$$

Здесь

$$H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -I_1(\kappa_1, r) \chi \cos \chi z \quad (422)$$

и сила в φ -направлении

$$F_\varphi = m \frac{d^2 r_\varphi}{dt^2} = I_1(\kappa_1, r) \chi \cos \chi z \cdot \cos \omega t. \quad (423)$$

Пренебрегая изменением радиуса за время прохождения полости, получим уравнение для угла φ :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = I_1(\kappa_1, r) [\cos(\omega_1 - \omega) t + \cos(\omega_1 + \omega) t]; \omega_1 = \chi \nu_2. \quad (424)$$

Отсюда

$$\dot{\varphi} = I_1(\kappa_1, r) \left[\frac{1}{(\omega_1 - \omega)^2} \cos(\omega_1 - \omega) t + \frac{1}{(\omega_1 + \omega)^2} \cos(\omega_1 + \omega) t \right]. \quad (425)$$

Таким образом, угол поворота $\varphi = I_1(k_1, r)$. Поскольку при малых r

значение $I_1(k_1, r) = \alpha r$, то $\varphi = r$, т. е. получаем уравнение спирали Архимеда. Поскольку одновременно с векторным квантовым потенциалом A_φ возбуждается и скалярный, создающие деление пучка на две части, то и получается на экране фигура из двух спиралей.

Так что существование таких явлений может служить доказательством существования квантовых векторных сил.

§ 2. Сдвиг частоты ЯМР для протона водорода в электрическом поле.

Экспериментатор, планируя эксперимент, должен представить весь процесс, который он собирается исследовать, в пространстве и во времени. Поскольку обычная квантовая механика дает только вероятностное описание квантового объекта, а экспериментатору желательно представить атомный объект в его индивидуальном виде, то тут получаются довольно интересные ситуации, особенно на самых простых объектах, где трудно затуманить дело сложностью объекта.

Вернемся снова к атому водорода, именно к вопросу о поляризации атомарного водорода в электрическом поле. В книге А. Р. Хиппеля «Диэлектрики и волны» [23] этому вопросу посвящен целый параграф. С точки зрения обычной квантовой механики атом водорода в основном состоянии выглядит в виде сферического облака, в которое «размазывается» электрон, в центре облака находится протон. Центры тяжести облака и протона совпадают, и в отсутствие электрического поля о дипольном моменте атома водорода говорить не приходится. Наложение электрического поля создает индуцированный электрический дипольный момент, который можно элементарно рассчитать, взяв плотность облака постоянной в объеме сферы радиуса первой борновской орбиты. При напряженности поля в $2 \cdot 10^5$ в/м можно создать вполне измеримый индуцированный момент порядка $3,3 \cdot 10^{36}$ к. м., при этом центр электронного облака сместится от центра протона на расстояние около $2 \cdot 10^{-17}$ м! «Таким образом, - говорит Хиппель - инженер-электрик, - тем самым определяет размеры, меньшие размеров ядра!». К сожалению, фактические измерения восприимчивости атома водорода еще не выполнены из-за экспериментальных трудностей.

С нашей точки зрения, - это все сплошное недоразумение. Нельзя всегда и везде переносить статистические свойства атомных объектов на их индивидуальную структуру. Когда речь идет об индивидуальных объектах, необходимо применять автоколебательную квантовую механику.

Рассмотрим проблему с точки зрения этой механики. Как мы видели в предыдущей главе, электрон в основном состоянии атома водорода движется вдоль радиуса, совершая в этом направлении автоколебания. Поэтому для индивидуального атома водорода никогда центры протона и электрона не совпадают, а находятся в среднем на конечном расстоянии

порядка $0,5 \cdot 10^{-8}$ см. Поэтому атом водорода всегда имеет дипольный электрический момент! Без электрического поля эти диполи направлены хаотически по всем направлениям и не создают какого-либо результирующего момента. Приложение даже небольшого поля ориентирует диполи и создает такой момент. В этом можно убедиться на опыте. Для этого можно использовать ядерный магнитный резонанс для протонов. Действительно, магнитный момент электрона создает на расстоянии $r = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см (среднее расстояние электрона от протона) магнитное поле напряженностью

$$H_{н11} = \frac{2M_n}{z^3} \approx \frac{2 \cdot 9,28 \cdot 10^{-21}}{0,5^3 \cdot 10^{-24}} \approx 150000 \text{ гс}$$

(в точке на оси магнитного момента электрона) и

$$H_{н1} = \frac{M_n}{R^3} \approx \frac{9,28 \cdot 10^{-21}}{0,5^3 \cdot 10^{-24}} \approx 75000 \text{ гс}$$

(в точке на перпендикуляре к оси момента электрона).

Величина этих полей на порядок больше полей, применяемых в установках ЯМР. В обычных условиях эти магнитные поля электронов ориентируются по отношению к основным полям установки (постоянному H_0 и переменному H_1) совершенно хаотически и не влияют на резонансную частоту. Если же мы кроме магнитного поля ЯМР приложим еще и электрическое вдоль или поперек основного постоянного магнитного поля, то получим совершенно новую ситуацию. Если оставить без внимания действие тепловых движений атомов, то можно сказать, что электрическое поле выстроит атомные диполи вдоль линий электрического поля, а основное магнитное поле выстроит вдоль своих линий магнитные моменты электронов и протонов. Таким образом, протоны окажутся в некотором результирующем магнитном поле, складываемом из поля внешнего и поля собственных электронов. Тепловое движение атомов не дает, конечно, возможности использовать полностью поля собственных электронов, тем не менее вклад их будет достаточно большим при больших электрических полях. Эффект от магнитных полей собственных электронов будет выражаться в сдвиге резонансной частоты в пропорции, выражаемой обычным соотношением $\omega = \gamma H$, где γ - гиромагнитный множитель, характерный для данного ядра. Если же частота генератора, создающего поперечное переменное поле H_1 , не меняется, то резонансная линия расширится. Действительно, в качестве меры расстройки резонанса берут величину:

$$\delta = \frac{H - \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)}{H_1} = \frac{\Delta\omega}{\omega_1} = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_1}. \quad (426)$$

Здесь $\omega_1 = \gamma H_1$ - частота, связанная с поперечным полем, $\omega_0 = \gamma H_0$ - частота, связанная с основным полем электромагнита ЯМР, $\omega = \gamma H_{рез}$ - частота,

все время на некотором среднем расстоянии от протона (см. рис. 49). Для такого маятника выражение для энергии имеет вид [25]:

$$E_0 = \frac{ml_0^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mg \cdot l_0 \cos \varphi = - mgl_0 \cos \varphi_0; \quad (427)$$

здесь φ - угол отклонения от вертикали, φ_0 - максимальный угол отклонения. Период колебания такого маятника

$$T = 4 \sqrt{\frac{l_0}{g}} \cdot K\left(\sin \frac{\varphi_0}{2}\right), \quad (428)$$

где

$$K(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \xi}}; \quad \sin \xi = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}}; \quad \kappa = \sin \frac{\varphi_0}{2}. \quad (429)$$

В нашем случае длиной маятника l_0 является среднее расстояние от электрона до протона. Ускорение $g = eE/m$, E - напряженность электрического поля.

{Действительно, предположим для простоты, что электрон в атоме водорода совершает вдоль радиуса гармонические колебания

$$l = l_0(1 + \sin \omega t) \quad (430)$$

ω - частота квантовых колебаний электрона в основном состоянии атома водорода, $\omega \sim 10^{16}$ и $T \sim 10^{-16}$ сек. Выражение для полной энергии такого электрона будет

$$E = \frac{ml^2}{2} + \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = \\ = \frac{m}{2} [l_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + \dot{\varphi}^2 l_0^2 (1 + \sin \omega t)^2] - mgl_0 (1 + \sin \omega t) \cos \varphi.$$

Поскольку, как мы сейчас увидим, квантовая частота ω во много раз больше частоты колебаний "маятника", которым оказывается атом водорода, помещенный в электрическом поле, первый член можно отбросить, как постоянный, а синусами в скобках можно пренебречь, так как в среднем они дадут нуль. Отсюда и получается выражение (427).}

Такой маятник будет излучать энергию, однако это излучение не будет квантовым, так как переходы из одного состояния в другое не будут сопровождаться изменением момента количества движения системы (аналогично излучению обычных дипольных радиоантенн).

Периоды колебания лежат между двумя крайними значениями, соответствующими значениям $\varphi_0 = \pi$ и $\varphi_0 = 0$. Для $\varphi_0 = \pi$ период $T = \infty$, так как $K(1) = \infty$, для $\varphi_0 = 0$ имеем $K(0) = 1,5708$ и $E = 4(l_0)^{1/2}/g \cdot 1,5708$.

Если для l_0 взять 10^{-8} см, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ г, $e = 4,7 \cdot 10^{-10}$ и $E = 10^5$ в/см = $3,33 \cdot 10^2$ CGSE, то $T = 4,7310^{-14}$ сек и $\lambda = 14,2$ мкм.

Таким образом, для поля 100 кв/см и для малых φ_0 излучение будет

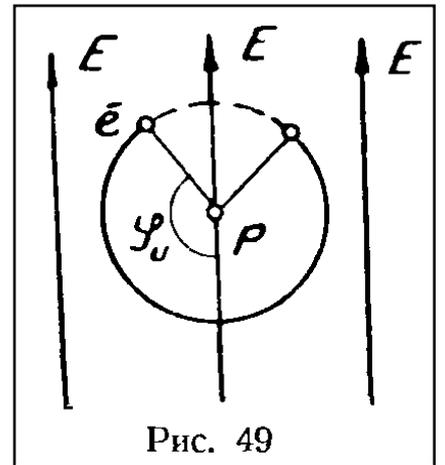


Рис. 49

попадать в область инфракрасных лучей. Подсчитаем теперь при каком поле будут получаться радиоволны десятисантиметрового диапазона. Для $\lambda = 10 \text{ см}$, $T = 0,333 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$ и для $\varphi_0 \ll 1$ получаем $E = 2,010^{-3} \text{ в/см}$.

Если $\varphi_0 \rightarrow \pi$, то для данной длины волны потребуется соответственно большее поле, так как возрастает функция $K \sin(\varphi_0/2)$.

Энергия, испускаемая ускоренно заряженной частицей, обладающей малой скоростью, за единицу времени, равняется

$$S = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2. \quad (431)$$

В нашем случае

$$v = l \dot{\varphi}, \quad \dot{v} = l \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi = -\frac{eE}{m} \sin \varphi$$

и

$$\dot{v}^2 = \frac{e^2 E^2}{m^2} \sin^2 \varphi. \quad (432)$$

Беря $\varphi \leq \pi$ и усредняя $\sin^2 \varphi$, получим

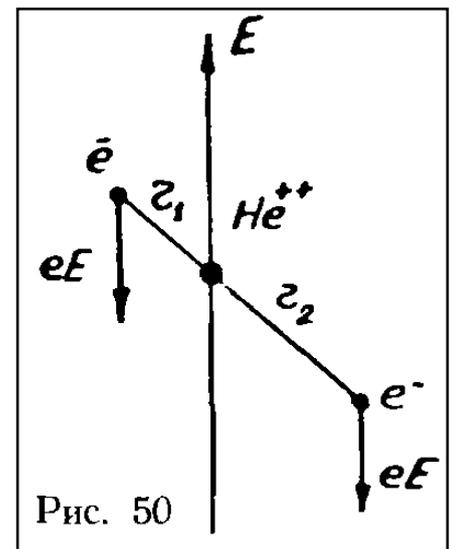
$$S = \frac{1}{3} \frac{e^4 E^2}{c^3 m^2}. \quad (433)$$

Для $E = 100 \text{ кв/см}$ получим $S = 9,5 \cdot 10^{-11} \text{ эрг сек}$. Если пренебречь изменением $\langle \sin^2 \varphi \rangle$ по мере "высвечивания" атома, находящегося во внешнем электрическом поле, то вся энергия его растеряется за время $ES = mg/S = 1,68 \cdot 10^{-5} \text{ сек}$.

Время "высвечивания" будет зависеть также от начального угла φ_0 . В результате столкновений истраченная атомом добавочная "маятниковая" энергия может полностью, частично или даже с избытком восстановиться.

Аналогично может излучать и атом гелия, находящийся в основном состоянии. В этом состоянии два его электрона колеблются вдоль радиусов, расположенных на одной прямой, причем размах колебаний и средние расстояния электронов от ядра не равны друг другу. Ввиду больших сил отталкивания между электронами (каждый электрон создает в месте нахождения другого электрона напряженности $> 10^9 \text{ в/см}$) внешние поля не меняют взаимного расположения электронов.

"Маятниковые" колебания электроны будут совершать под действием результирующего момента сил, равного $eE(r_2 - r_1)$ (см. рис. 50). Для вращательных состояний атомов водорода и гелия и для атомов с большим числом электронов "маятниковый" эффект будет очень слабым или даже будет совсем отсутствовать.



В качестве другого примера рассмотрим радиоизлучение так называемых хромосферных вспышек. Если в момент появления вспышки рассматривать Солнце в лучах водорода, то вспышка покажется ослепительно ярким пятном на солнечной поверхности. Одновременно со вспышкой радиоизлучение Солнца внезапно увеличивается в миллион раз. При вспышках из недр Солнца извергаются громадные массы вещества в виде водородной плазмы (с примесью, конечно, и других элементов). На некоторой высоте из плазмы образуется атомарный водород. При вертикальных перемещениях плазмы происходит в отдельных местах разделение зарядов, в результате чего образуются громадные электрические токи с соответствующими громадными магнитными полями. Токи эти быстро спадают, образуя сильнейшие самоиндукционные электрические поля [26], которые часть электронов ускоряют до таких энергий, что они выбрасываются далеко за пределы атмосферы Солнца, эти же электрические поля вызывают и громадной интенсивности радиоизлучение согласно описанному нами механизму. При больших электрических полях возможно излучение волн и других диапазонов вплоть до рентгеновского. И для «спокойного» Солнца «маятниковый» механизм излучения будет работать, так как всегда будут флуктуация магнитного поля, а следовательно, будут и электрические поля.

Аналогично объясняется и радиоизлучение туманностей, так как и здесь основным веществом является атомарный водород, а электрических полей тех небольших напряженностей, которые необходимы для эффекта, всегда бывает достаточно.

Описанный эффект может быть проверен и в земных условиях. Соответствующий опыт нами готовится.

§ 4. О некоторых физических свойствах молекул ДНК.

Согласно модели, предложенной Криком и Уотстоном, молекула ДНК состоит из двух антипараллельных молекулярных цепей, закрученных в две спирали с общей осью и с определенным сдвигом в направлении оси.

Диаметр спиралей достигает 18А, а расстояние между витками каждой из спиралей 34А (подробнее см. [26, 27]). Очевидно, спиральная структура ДНК не случайна, и может быть именно благодаря этой структуре молекула ДНК оказывается наиболее подходящей для передачи генетической информации. Наличие спиральной структуры наводит на мысль, что периферические электроны молекул, образующих эти спирали, объединены в общую электронную оболочку, и некоторые электроны в ней движутся вдоль витков спиралей (причем в одном направлении). Электрический ток, получающийся таким образом, создает вдоль оси молекулы ДНК сильное магнитное поле. Благодаря этому магнитному полю, молекула ДНК будет обладать магнитным моментом и должна быть очень чувствительна к внешним магнитным полям.

Попробуем провести некоторые количественные расчеты в пользу такого предположения. На рис. 53а реальные молекулярные цепи, состоящие из фосфатов и сахаров, заменены мысленно «витками», образованными теми электронами, которые движутся вдоль этих цепей. Магнитное поле H в таком «соленоиде» будет иметь распределение, подобное тому, которое изображено на рис. 53 б (здесь показано распределение поля, обусловленное всеми «витками», кроме того, на месте которого рассматривается магнитное поле. На рис. 53а силовые линии такого поля в области рассматриваемого витка изображены пунктирными линиями).

Подобная ситуация (т. е. движение электронного пучка в магнитном поле такого вида) имеется в бетатроне. Только там магнитное поле для кольца из электронов создается токами, идущими по виткам из проволоки, расположенными над и под кольцом из электронов.

Уравнения движения одиночного электрона в магнитном поле бетатронного типа можно записать в виде [29]:

$$m\ddot{r} = -\frac{dV_M}{dr}, \quad (434)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{dV_M}{dz}, \quad (435)$$

$$V_M = \frac{e^2}{2mc^2} \left[\frac{r\bar{H}_z}{2} \right]^2. \quad (436)$$

Здесь $m = 9 \cdot 10^{-28}$ г - масса электрона, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек - скорость света, $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ CGSE - заряд электрона, H_z - средняя напряженность магнитного поля в круге радиуса r .

Азимутальное движение характеризуется равенством

$$mr^2 \dot{\Theta} = \frac{e}{2c} r^2 \bar{H}_z \quad (437)$$

$r\dot{\Theta}' = v_\Theta$ - азимутальная скорость электрона. Очевидно также

$$V_M = \frac{mv_\Theta^2}{2} \quad (438)$$

Полную энергию электрона можно записать в виде

$$E = \frac{m}{2} [v_r^2 + v_z^2 + v_\Theta^2] = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2} + V_M \quad (439)$$

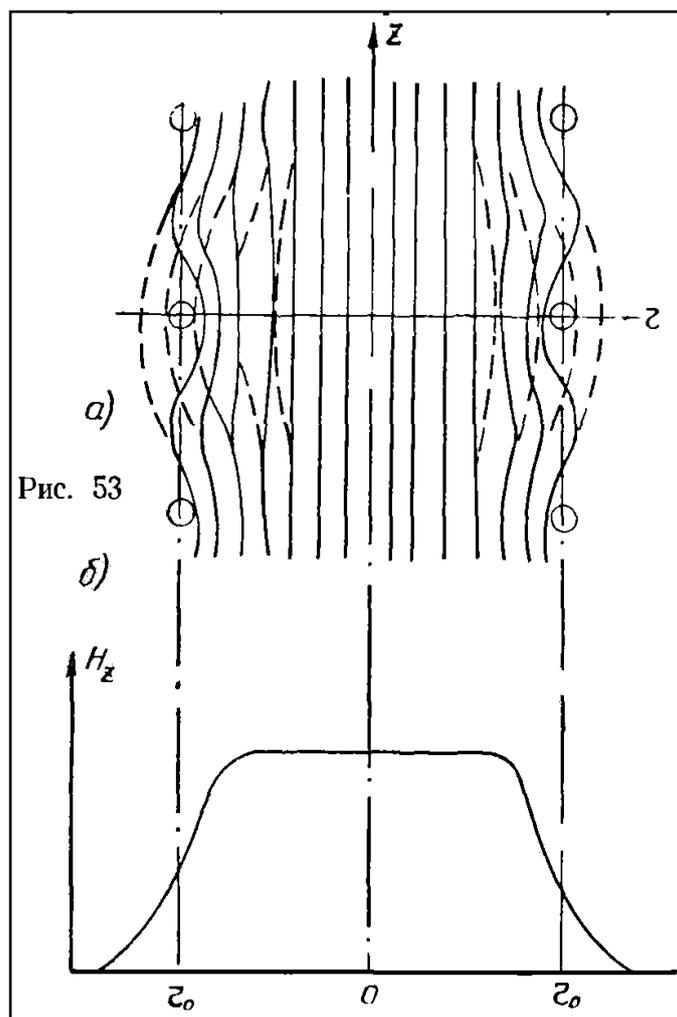


Рис. 53

то есть мы можем рассматривать формально движение электрона в плоскости (r, z) , как движение в потенциальном поле, определяемом функцией V_M , плоскость же (r, z) движется с постоянной угловой скоростью.

В первом приближении функцию V_M можно записать в виде

$$V_M = V_0 \left[1 + \frac{1-n_0}{2r_0^2} x^2 + \frac{n_0}{2r_0^2} z^2 \right]. \quad (440)$$

Здесь V_0 - значение функции V_M на так называемой равновесной орбите с радиусом r_0 , x и z - отклонения фактической орбиты электрона от равновесной. Очевидно,

$$V_0 = \frac{m}{2} v_{\perp}^2(r_0) = \frac{e^2}{2c^2} \frac{r_0^2 H_z^2(r_0)}{m}; \quad (441)$$

так как

$$\frac{m v_{\perp}^2(r_0)}{r_0} = \frac{e}{c} v_{\perp}(r_0) \cdot H_z(r_0). \quad (442)$$

Буквой n_0 обозначена величина

$$n_0 = - \frac{r_0}{H_z(r_0)} \cdot \left[\frac{\partial H_z}{\partial r} \right]_{r_0}$$

Для равновесной орбиты имеет место равенство:

$$H_z(r_0) = \frac{\overline{H_z(r_0)}}{2}. \quad (443)$$

В нашем случае равновесная орбита представляет собой не окружность, как в бетатроне, а спираль. Поэтому под z нужно будет понимать отклонение в z -направлении именно от этой спирали. В дальнейшем, однако, мы будем говорить только о таких движениях электрона, когда имеются отклонения от равновесной орбиты в r -направлении, отклонений же в z -направлении нет.

Для этого случая мы можем нарисовать энергетическую диаграмму (рис. 54). Кривая V_M будет представлять собой параболическую потенциальную яму (более точная кривая для V_M изображена пунктирной линией).

С классической точки зрения колебания электронов вдоль радиуса возможны с любыми энергиями, с квантовой же точки зрения эти колебания могут происходить только с определенной энергией. Для квантовой системы имеется характерный для нее набор

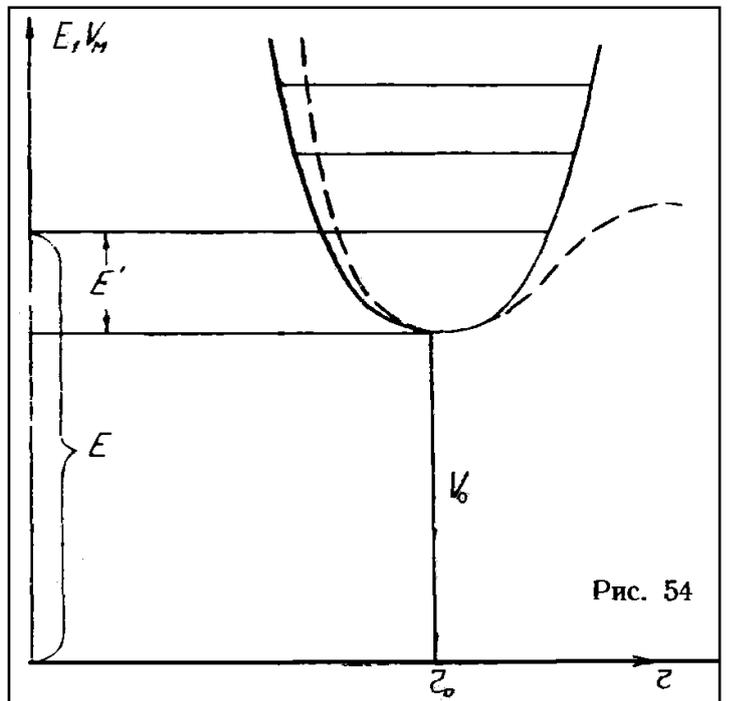


Рис. 54

возможных энергетических уровней.

Мы будем рассматривать квантовые свойства электронов в молекуле ДНК согласно автоколебательной квантовой механике.

Поскольку электрон в параболической яме будет представлять собой гармонический осциллятор, квантовые уровни для колебательной энергии электрона, движущегося по спиральям молекулы ДНК:

$$E = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sqrt{\nu(\nu+1)}, \nu = 1, 2, 3 \dots \quad (444)$$

Попробуем теперь оценить количественно характеристики молекулы ДНК, которые должны иметь место, если наши предположения справедливы. Прежде всего вычислим величину напряженности магнитного поля внутри "катушки", образованной спиралью молекулы ДНК. Будем считать, что электроны, образующие это поле, движутся вдоль спиралей как раз по равновесным "бетатронным" орбитам, т. е. не совершают колебаний и вдоль радиуса. Сила тока, создаваемая одним электроном, движущимся по кругу радиуса r_0 со скоростью v_Θ будет

$$i = ev_\Theta / 2\pi r_0 \quad (445)$$

Число оснований на каждом витке спиралей ДНК около десяти. Примем, что на каждом звене укладывается 100 волн де Бройля (если принять во внимание сложность каждого звена, то это не будет большим числом). Таким образом

$$\lambda_\Theta = h/mv_\Theta = 2\pi r_0 / 1000 \quad (446)$$

Отсюда

$$v_\Theta = h \cdot 10^3 / 2\pi r_0 m$$

Сила тока от одного электрона получится

$$i = \frac{10^3 eh}{(2\pi r_0)^2 m} = 0,37 \cdot 10^{-2} \text{ ампер}$$

Поскольку по каждому "витку" одновременно движется не один электрон, а, по крайней мере, 100 электронов (опять-таки в силу сложного строения каждого витка спирали), то ток в витке будет

$$i_{\text{витк}} = 0,37 \text{ ампер}$$

Число "витков" спиралей ДНК, приходящихся на один сантиметр длины молекулы ДНК, оказывается около $3 \cdot 10^6$. Эти данные позволяют оценить напряженность магнитного поля внутри "катушки":

$$\bar{H}_z = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{i\omega}{l} = 1,4 \cdot 10^7 \text{ эрстед} \quad (447)$$

А так как поле создается двумя спиралью, то

$$\bar{H}_z(r_0) = 2,8 \cdot 10^7 \text{ эрстед}$$

По бетатронному условию (443) поле в области движения самих электронов будет в два раза меньше

$$H_z(r_0) = \frac{\overline{H_z}(r_0)}{2} = 1,4 \cdot 10^7 \text{ эрстед.} \quad (448)$$

Теперь мы можем оценить энергию квантовых уровней при колебаниях электронов около равновесной орбиты. Действительно,

$$\kappa = \frac{V_0(1-n_0)}{r_0^2} = (1-n_0) \frac{e^2 H_z^2(r_0)}{2mc^2},$$

$$\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{1-n_0}{2}} \cdot 2,49 \cdot 10^{14}.$$

Для $n_0 = 0,5$ и $\nu = 1$ энергия уровня будет

$$E' = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sqrt{\nu(\nu+1)} =$$

$$= \frac{h}{2\pi} \frac{eH}{cm} \sqrt{2} = 3,77 \cdot 10^{-13} \text{ эрг} = 0,236 \text{ эв.} \quad (449)$$

Такой порядок будут иметь энергии квантов света, испускаемых или поглощаемых электронами. Соответствующие длины волн света

$$\lambda = \frac{hc}{E'} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Это область инфракрасного света.

Для проверки правильности порядков величин, которые мы приняли и получили, вычислим границы потенциальной ямы при энергии первого колебательного уровня $E'_{\nu=1} = 0,236 \text{ эв}$. В точках, где колебательная скорость $v_r = 0$

$$V_m = \frac{\kappa x_{кр}^2}{2} = E'.$$

Отсюда

$$x_{кр} = \pm \sqrt{\frac{2E'}{\kappa}} = \pm 8,25 \cdot 10^{-8} \text{ см} \quad (450)$$

(x отсчитывается от r_0 - дна ямы).

Величина $x_{кр}$ оказывается меньше r_0 . Если принять во внимание, что мы сильно упростили физическую картину молекулы ДНК, то этот результат может свидетельствовать в пользу правдоподобия сделанных упрощений и принятых величин для числа электронов на витке и числа длин волн де Бройля на одном витке.

Рассмотренная модель электронных токов в молекуле ДНК позволяет сделать некоторые выводы, которые можно проверить на опыте. В частности, разности колебательных энергий электронов, движущихся по спиралям, позволяют предположить, что облучение молекул ДНК инфракрасным светом подходящей длины волны в течение определенного времени может вызвать или разрушение молекулы ДНК на определенном

участке, или вызвать дополнительно скручивание спиралей ДНК. или поведет к другим нарушениям. Все эти следствия вызовут какие-либо изменения в развитии облученных клеток.

Интересным является еще одно обстоятельство. Движение электронов по спиральным орбитам в молекуле ДНК идет без затраты внешней энергии - это движение внутримолекулярное. Но если это движение будет иметь рассмотренный выше характер, т. е. будет все время направлено от одного конца молекулы к другому, то, очевидно, концы молекул ДНК будут заряжаться и для непрерывного движения электронов необходимо, чтобы окружающая молекулу среда могла обеспечить подвод и увод электронов, и этот процесс будет требовать затраты энергии.

{У бактериальных вирусов, находящихся вне клетки, такой возможности не имеется, и движение электронов по спиральям будет иметь колебательный характер, т. е. электроны будут двигаться то к ОДНОМУ концу молекулы, то к другому. Может быть как раз с появлением для электронов возможности двигаться в молекуле ДНК в одном направлении и начинается то, что мы зовем жизнью?}

Таким образом, помещение клетки в магнитное поле должно сказаться как на определенной ориентации молекул ДНК за счет их магнитных моментов, вызванных существованием электронных токов вдоль спиралей, так и появлением разностей электрических потенциалов между концами ориентированных в магнитном поле молекул ДНК. И то и другое обстоятельство изменяет обычный ход реакций и может повести к соответствующим нарушениям биологических закономерностей в клетке. Сейчас известно действие магнитных полей на организм по многочисленным публикациям. В частности, в нашей лаборатории Г.П. Гарганеевым был проведен опыт выращивания икры лягушек в магнитном поле. В противоположность контрольным икринкам, где развитие шло, в обычном порядке, опытные икринки почти все погибли на ранних стадиях развития, и те, которые достигли стадии головастиков, все имели явные уродства. Эти и подобные факты делаются понятными с той точки зрения, что действие магнитного поля начинается, прежде всего, с воздействия на молекулы ДНК.

В литературе имеются подтверждения сегнетоэлектрических свойств молекулы ДНК [30]. Это говорит в пользу нашей точки зрения, так как при прекращении тока вдоль спиралей ДНК самоиндукционный эффект создает на концах молекулы перенапряжения весьма значительной величины (до 10^6 в). Это обуславливает существование в среднем большого электрического момента у молекул ДНК, а также может вести к началу расщепления нитей молекулы из-за электростатического отталкивания концов спиралей.

Вообще в биохимии господствует манера рассматривать и сложные живые молекулы чисто статически, как обычные мертвые молекулы (кстати за это в известной степени несет ответственность обычная квантовая механика), поэтому совершенно непонятно, зачем должен существовать обмен веществ, если каждая молекула представляет достаточно устойчивое образование.

Если же принять во внимание токи, проходящие через молекулы ДНК и другие живые молекулы, то делается ясной и необходимость непрерывного обмена веществ в каждой молекуле, так как такой ток, который замыкается через окружающую молекулу среду, сам по себе представляет нестабильное явление и для поддержки его необходимо затрачивать энергию. Если же ток замыкается внутри молекулы, то это есть ток сверхпроводимости и на поддержание его, конечно, никакой энергии не потребляется. Такими токами являются все движущиеся в атомах электроны. Обычно под токами сверхпроводимости понимают токи, которые можно получить при температурах, близких к абсолютному нулю, но это просто означает, что при этих температурах даже макроскопическое тело в целом оказывается, квантовой системой и токи в ней не требуют расхода энергии.

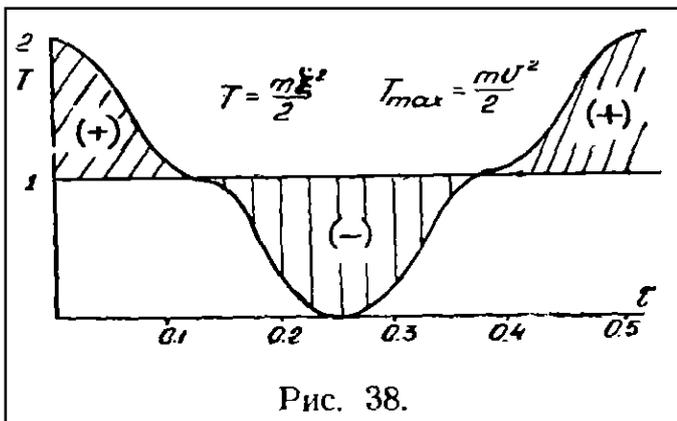
Глава VII

ИЗЛУЧЕНИЕ И ДРУГИЕ ПЕРЕХОДНЫЕ (НЕСТАЦИОНАРНЫЕ) ПРОЦЕССЫ

§ 1. О механизме излучения.

Излучение представляет собой переходной нестационарный процесс. Переходные процессы в автоколебательной квантовой механике представляют несравненно большие трудности для исследования, чем в обычной квантовой механике, где они зачастую трактуются просто как стационарные статистические процессы. В согласии с духом автоколебательной квантовой механики мы должны рассматривать конкретный механизм переходного процесса в данном индивидуальном атомном объекте.

Как мы видели, для свободной частицы имеет место непрерывный обмен энергией между частицей и окружающей ее ближней зоной среды. Энергия



свободной частицы для покоящегося наблюдателя меняется по закону, изображенному на рис. 38. На участке **BC** (где скорость ξ' направлена против классической скорости $x'_{кл}$) энергия частицы уходит в среду (*помечен (-) - ред*), на участках **AB** и **CD** (где скорость ξ' направлена на ту же сторону, что и скорость $x'_{кл}$) энергия из среды

переходит на частицу (*помечены (+) - ред*). Аналогичный регулярный процесс имеет место и в связанной системе для стационарного состояния ее. Однако такой процесс может быть нарушен внешним возмущением того или иного рода, и тогда начинается нестационарный процесс. В результате этого

переходного процесса система может или возвратиться в прежнее состояние, или перейти в новое состояние с меньшей энергией. Этот переход должен быть каким-то особым процессом, чтобы система могла отдать энергию в виде кванта света, который также должен представлять собой особое структурное образование, требующее для своего создания и соответствующего процесса.

В чем же заключается этот процесс? Можно сделать, исходя из картины стационарного процесса, предположение, что, когда происходит нарушение правильных фазовых соотношений между классическим движением и волной, обуславливающей квантовое движение ξ , тогда режим правильного обмена энергией между частицей и средой заменяется режимом торможения подобным кулонову трению, когда под действием силы тело не ускоряется, а движется с постоянной скоростью, таким образом, должно быть

$$\begin{aligned}x^* &= x_{кл} + \xi = v^* t, \\ \dot{x}_{кл} - \dot{\xi} &= v^*\end{aligned}\quad (451).$$

(для простоты мы рассматриваем одномерный случай). Скорость v^* должна быть направлена в сторону центра сил, скорость ξ' - против скорости $x'_{кл}$.

Полная кинетическая энергия частицы

$$T_{кин} = \frac{m \dot{x}^{*2}}{2} = \frac{m \dot{x}_{кл}^2}{2} - \frac{m \dot{\xi}^2}{2} = \text{const}, \quad (452)$$

а вся энергия

$$E = \frac{m \dot{x}^{*2}}{2} + V(x) \Big|_{x^*} \quad (453).$$

Поскольку скорость ξ'^* остается постоянной величиной, а $V(x)$ зависит от x , т. е. в разных местах пребывания частицы будет разной, то величина энергии E оказывается убывающей функцией времени, так как частица должна «падать» в направления минимума $V(x)$.

В стационарных процессах торможение могло доводить частицу до нулевой скорости, но только на мгновение, так как энергия регулярно возвращается обратно к частице. Для нестационарного процесса $V^* = \text{const} \neq 0$, так как здесь должна быть отдача энергии частицей без возврата. Двигаясь с начала нарушения резонансного автоколебательного режима как бы в отсутствие сил, частица в какой-то момент времени окажется около точки, где ее скорость окажется равной скорости частицы в этой точке для какого-то другого устойчивого состояния системы. Тогда частица вновь начнет стационарные автоколебания уже в этом состоянии, избыточная же энергия, равная разности энергий верхнего, начального и нижнего, конечного, уровней отрывается в виде кванта. Процесс вхождения в резонанс может быть очень быстрым и отрыв кванта происходит после наступления нового резонанса, поэтому вопрос о том, почему квант «знает» куда должен упасть

электрон, решается сам собой.

При поглощении квантов процесс идет в обратном порядке. Когда квантовый свободный "пузырь" - фотон налетает на систему, он при благоприятном направлении движения оказывается сразу "нагруженным" частицей и мгновенно останавливается (так же как при отрыве от частицы мгновенно приобретает скорость c). Если нагрузка соответствует "пузырю", т. е. возможно создание новой резонансной системы, то квант поглощается, если же квант оказывается неподходящим — он вновь покидает систему.

§ 2. Излучение гармонического осциллятора.

Пусть в момент схода с резонансного движения скорость осциллятора

была $\dot{x}^* = \dot{x}_{кл}$ (квантовым сдвигом ξ для простоты пренебрегаем)

$$\dot{x}_2^2 = \frac{2}{m} \left[E_2 - \frac{\kappa x_2^2}{2} \right], \quad (454)$$

значок "2" при x и x' означает, что речь идет об уровне энергии E_2 .

Начиная с этого момента,

$$x = -|\dot{x}_2| t + x_2. \quad (455)$$

Выражение для энергии частицы

$$E = \frac{m \dot{x}_2^2}{2} + \frac{\kappa}{2} (-|\dot{x}_2| t + x_2)^2. \quad (456)$$

$$\frac{m \dot{x}_2^2}{2}$$

Поскольку $\frac{m \dot{x}_2^2}{2}$ является постоянной величиной, а потенциальная энергия частицы со временем убывает (частица должна двигаться к центру сил), то энергия E также будет убывать. Если в начальный момент эта энергия была

$$E_2 = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sqrt{6}, \quad E_1 = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sqrt{2},$$

а в конце перехода стала

то по

формуле (456) можно найти время перехода из одного состояния в другое.

Пишем для этих моментов формулу (456):

$$E_2 = \frac{m \dot{x}_2^2}{2} + \frac{\kappa}{2} x_2^2, \\ E_1 = \frac{m \dot{x}_2^2}{2} + \frac{\kappa}{2} (-|\dot{x}_2| t_{кон} + x_2)^2. \quad (457)$$

Разность этих выражений

$$E_2 - E_1 = -\frac{\kappa}{2} \dot{x}_2^2 t_{кон}^2 + \frac{\kappa}{2} \cdot 2 |\dot{x}_2| t_{кон} \cdot x_2.$$

Отсюда получаем

$$t_{кон} = \frac{x_2}{|\dot{x}_2|} - \sqrt{\frac{x_2^2}{|\dot{x}_2|^2} - 2 \frac{E_2 - E_1}{|\dot{x}_2|^2 \kappa}}. \quad (458)$$

Минимальная кинетическая энергия, с которой может совершиться

"падение", равна максимальной кинетической энергии нижнего уровня (рис. 55)

$$\frac{m \dot{x}_2^2}{2} = E. \quad (459)$$

Этим самым можно определить x_2 :

$$x_2^2 = \frac{2}{\kappa} (E_2 - E_1) \quad (460)$$

и

$$\frac{x_2}{|\dot{x}_2|} = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \sqrt{\frac{E_2}{E_1} - 1}. \quad (461)$$

Отсюда

$$t_{\text{кон}} = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \sqrt{\frac{E_2}{E_1} - 1}. \quad (462)$$

Проверяем соотношение неопределенности

$$\Delta t \cdot \Delta E = t_{\text{кон}} \cdot (E_2 - E_1) = \frac{\hbar}{2\pi} \sqrt{2} (\sqrt{3} - 1)^{3/2} = \frac{\hbar}{2\pi} 0,88 \quad (463)$$

Таким образом, около этой точки будет точно выполняться соотношение

$$\Delta t \cdot \Delta E = \frac{\hbar}{2\pi}$$

Более точный анализ гармонического осциллятора мы проводить не будем не только из-за того, что закон сил гармонического осциллятора слишком неточен, но и из-за того, что, строго говоря, нельзя говорить об излучении "чистого" осциллятора. Излучать может только осциллятор, который одновременно является и ротатором, потому что квант должен обязательно уносить момент количества движения, и переходы с излучением должны менять соответственно момент количества движения излучающей системы.

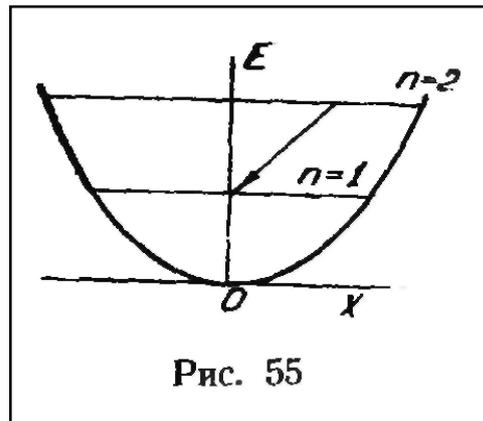


Рис. 55

§ 3. Энергетические переходы в атоме водорода.

Как и в примере с осциллятором, мы вместо результирующих координат x^* и скоростей x'^* , с которых начинается переход, будем брать $x_{\text{кл}}$ и $x'_{\text{кл}} = v$. Учет квантовых сдвигов будет давать некоторый разброс по энергиям, который обычно толкуется, как ширина уровня энергии. Пусть в начальный момент перехода (после нарушения резонансного стационарного движения) электрон имел координаты r и φ и находился на соответствующем уровню энергии эллипсе. Кулоновская сила, действующая на электрон

$$F = -\frac{e^2}{r^2} = m \frac{d}{dt} \left[\frac{dr}{dt} \right], \quad (464)$$

всегда направлена в сторону меньших r . В направлении φ классических сил нет. При переходе к режиму кулонова трения, заставляющего электрон двигаться в r -направлении с постоянной скоростью,

$$r^* = r_{кл} + \xi_r = v_r t, \quad v_r = \text{const}. \quad (465)$$

Создающаяся таким образом вязкость среды будет действовать на движение частицы во всех направлениях, в том числе и в направлении азимута φ :

$$\frac{d}{dt} (r \dot{\varphi}) = -\frac{e^2}{mr^2}. \quad (466)$$

Отсюда

$$r \dot{\varphi} \Big|_{t_0}^t = - \int_{t_0}^t \frac{e^2}{mr^2} dt \quad (467)$$

Поскольку $v_r = \text{const} = \alpha < 0$ (мы, как уже говорили, поведем выкладки с классическими координатами, вместо результирующих), то

$$r = \alpha t + \beta$$

$$r \dot{\varphi} \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \frac{e^2 dt}{m(\alpha t + \beta)^2} = \frac{e^2}{m\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha t + \beta} \Big|_{t_0}^t \quad (468)$$

или

$$r \dot{\varphi} - (r \dot{\varphi})_0 = \frac{e^2}{m\alpha} \left[\frac{1}{\alpha t + \beta} - \frac{1}{\alpha t_0 + \beta} \right]. \quad (469)$$

Вращательный момент электрона будет переменной величиной, так во время перехода меняется и r и $r\dot{\varphi}$:

$$p_\varphi = mr \cdot r \dot{\varphi}$$

$$= m(\alpha t + \beta) \left[(r \dot{\varphi})_0 - \frac{e^2}{m\alpha(\alpha t_0 + \beta)} \right] + \frac{e^2}{\alpha} \quad (470)$$

Напишем выражение для энергии частицы

$$E = \frac{m\alpha^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2m(\alpha t + \beta)^2} - \frac{e^2}{\alpha t + \beta} \quad (471)$$

В начале и в конце перехода получится

$$E_{\text{нач}} = \frac{m\alpha^2}{2} + \frac{P_{\varphi \text{ нач}}^2}{2m(\alpha t_0 + \beta)^2} - \frac{e^2}{\alpha t_0 + \beta}, \quad (472)$$

$$E_{\text{кон}} = \frac{m \alpha^2}{2} + \frac{P_{\varphi \text{ кон}}^2}{2m (\alpha t_{\text{кон}} + \beta)^2} - \frac{e^2}{\alpha t_{\text{кон}} + \beta},$$

$$P_{\varphi \text{ нач}} = m (\alpha t_0 + \beta) (r \dot{\varphi})_0,$$

$$P_{\varphi \text{ кон}} = (\alpha t_{\text{кон}} + \beta) \left[\frac{P_{\varphi \text{ нач}}}{\alpha t_0 + \beta} - \frac{e^2}{\alpha (\alpha t_0 + \beta)} \right] + \frac{e^2}{\alpha}.$$

Зная $E_{\text{нач}}$, $E_{\text{кон}}$, $P_{\varphi \text{ нач}}$, $P_{\varphi \text{ кон}}$, мы можем найти α , β , t_0 , $t_{\text{кон}}$.
Получается, что данный переход может быть выполнен только единственным образом. Если принять во внимание квантовые сдвиги ξ_r , ξ_φ , то мы могли бы получить целую область возможных начальных и конечных значений параметров, но зато вычисления оказались бы несравненно сложнее. Пусть

$$E_{\text{нач}} = E_2 (n = 2, l = 1),$$

$$E_{\text{кон}} = E_1 (n = 1, l = 0).$$

В числах

$$E_2 = - \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 \cdot 4} = - 5,42 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}, \quad (473)$$

$$E_1 = - \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 \cdot 1} = - 21,68 \cdot 10^{-12} \text{ эрг},$$

$$P_{\varphi_2} = \frac{h}{2\pi} \sqrt{2} = 1,49 \cdot 10^{-27},$$

$$P_{\varphi_1} = 0, \quad e^2 = 23 \cdot 10^{-20}, \quad \frac{P_{\varphi_2}^2}{2m} = 0,122 \cdot 10^{-26}, \quad t_0 = 0.$$

Система уравнений (472) приобретет вид:

$$- 21,68 \cdot 10^{-12} = 4,5 \cdot 10^{-28} \alpha^2 - \frac{23 \cdot 10^{-20}}{\alpha t_{\text{кон}} + \beta}$$

$$- 5,42 \cdot 10^{-12} = 4,5 \cdot 10^{-28} \alpha^2 + \frac{12,2 \cdot 10^{-28}}{\beta^2} - \frac{23 \cdot 10^{-20}}{\beta}$$

$$0 = \frac{\alpha t_{\text{кон}} + \beta}{\beta} \left[1,49 \cdot 10^{-27} - \frac{23 \cdot 10^{-20}}{\alpha} \right] + \frac{23 \cdot 10^{-20}}{\alpha}.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$\alpha = - 1 \cdot 10^8, \quad \beta = 1,438 \cdot 10^{-8}, \quad t_{\text{кон}} = 0,568 \cdot 10^{-16} \text{ сек.}$$

Проверим прежде всего соотношение неопределенности

$$\Delta t = t_{\text{кон}} = 0,568 \cdot 10^{-16}, \quad \Delta E = E_2 - E_1 = 1,626 \cdot 10^{-11} \text{ эрг}$$

и

$$\Delta t \cdot \Delta E = 0,924 \cdot 10^{-27} = \frac{h}{2\pi}.$$

Теперь можно рассчитать траекторию электрона во время перехода.

Имеем:

$$r_{\text{нач}} = \beta \doteq 1,438 \cdot 10^{-8} \text{ см}, \quad r_{\text{кон}} = \alpha t_{\text{кон}} + \beta = 0,870 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$

Исходной траекторией является эллипс с эксцентриситетом $\varepsilon=0,71$, для него $r_{\text{max}}=3,62 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, $r_{\text{min}}=0,627 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Конечной траекторией будет прямая линия вдоль радиуса, для которой $r_{\text{max}}=1,06 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ и $r_{\text{min}}=0$.

Координату φ определяем из уравнения

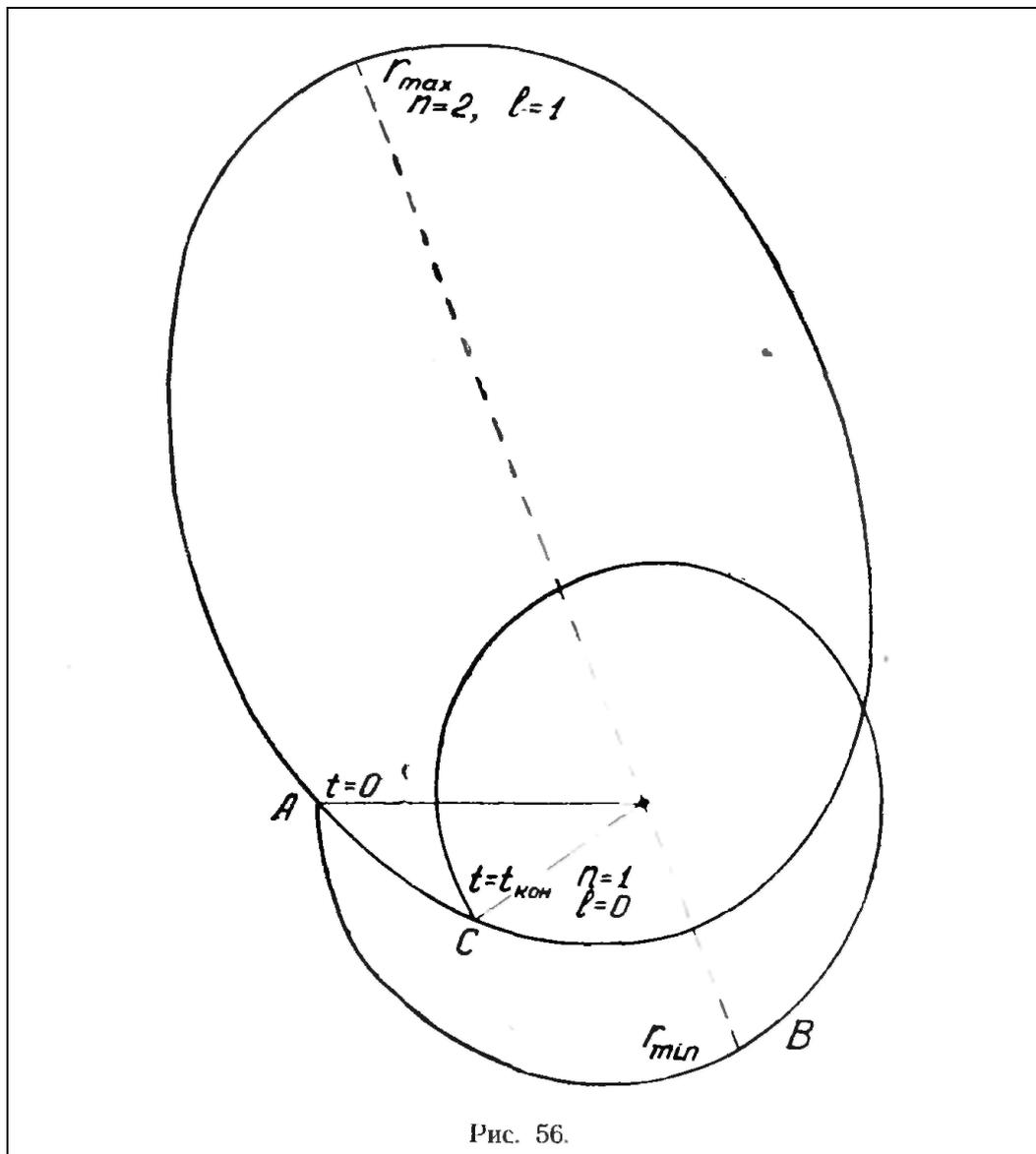
$$\varphi = \frac{1}{m(\alpha t + \beta)} \left[\frac{P_{\varphi \text{ нач}}}{\beta} - \frac{e^2}{\alpha \beta} \right] + \frac{e^2}{\alpha m (\alpha t + \beta)^2} \quad (474)$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{P_{\varphi \text{ нач}}}{\beta} - \frac{e^2}{\alpha \beta} \right] \ln \frac{\alpha t + \beta}{\beta} - \frac{e^2}{\alpha^2 m} \left[\frac{1}{\alpha t + \beta} - \frac{1}{\beta} \right] \quad (475)$$

После подстановки чисел

$$\varphi = -38,7 \cdot \ln(1 - 0,695 \cdot 10^{16} \cdot t) - 2,53 \left(\frac{1}{-10^{16} \cdot t + 1,438} - \frac{1}{1,438} \right)$$



Вместе с равенством $r = (-t+1,438) \cdot 10^{-8}$ это дает возможность сделать расчет переходной траектории электрона. Результаты расчета представлены на рис. 56. Электрон, двигаясь по спиральной траектории ABC , уменьшает свою энергию от E_2 до E_1 , кроме того, уменьшается и его момент количества движения с $P_{\varphi 2}$ до нуля. Этот момент получает отрывающийся от системы к моменту завершения перехода фотон. Отсюда ясно, почему электрон "знает" на какую орбиту он перейдет: он просто пробует все нижележащие орбиты, а излучение фотона имеет место только после окончательного выбора орбиты, т. е. после вхождения в резонансное движение по новой орбите.

§ 4. Фотон.

Если изобразить области применимости уравнений, описывающих частицы и электромагнитные волны на диаграмме в зависимости от величины скоростей v и u (рис. 57), то напрашивается мысль, что и для уравнений Максвелла, описывающих электромагнитные явления, должны существовать "сопряженные уравнения Максвелла". В этом убеждает нас и несимметричность уравнения Клейна-Гордона и полученного нами подобного ему уравнения (см. главу II, § 4).

Не являются ли "антиподные" уравнения Максвелла уравнениями электромагнитных вихрей? Может быть, кванты света и шаровые молнии являются именно электромагнитными вихрями, т. е. такими образованиями, которые в отличие от электромагнитных волн не обладают свойством расплывания в пространстве и имеют ограниченные размеры.

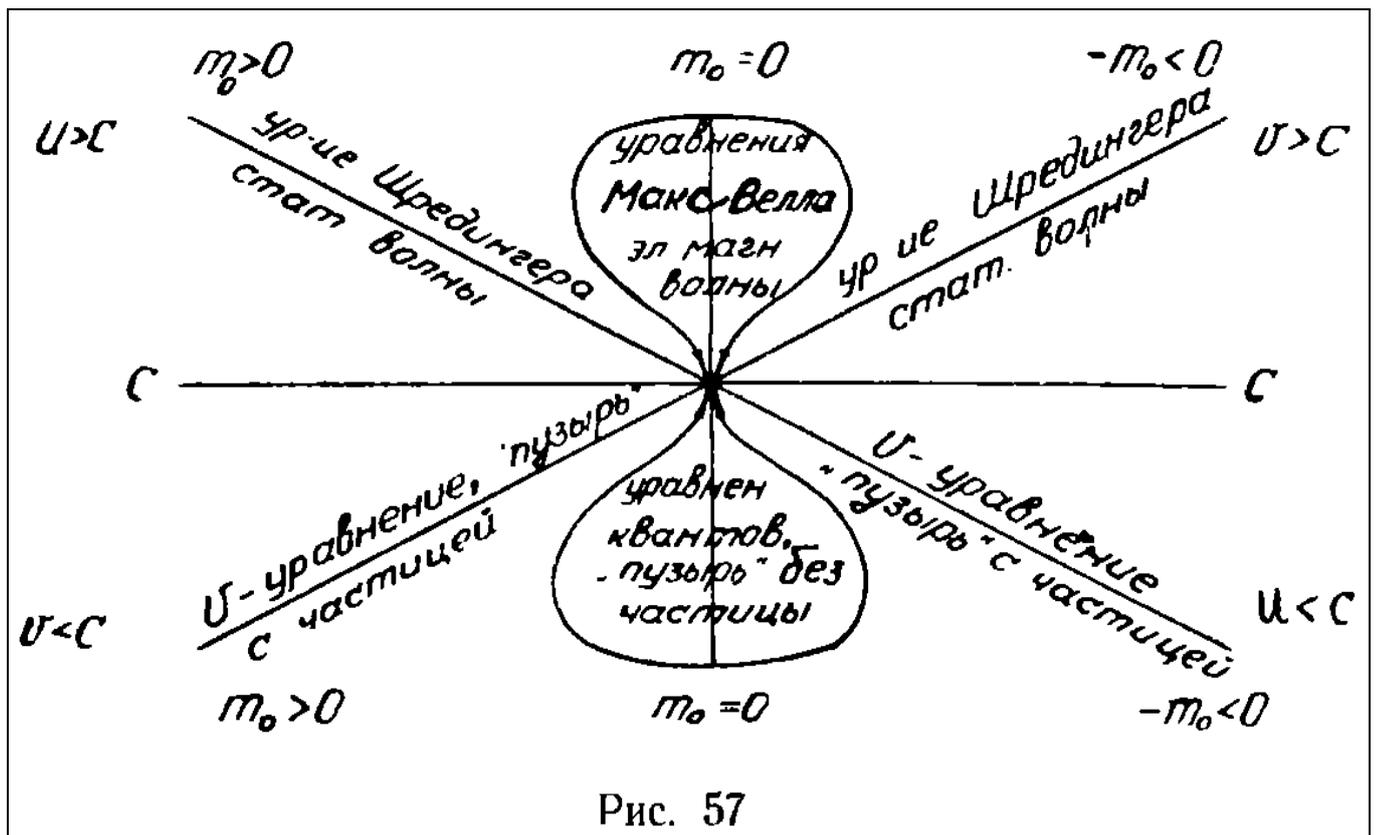


Рис. 57

Тем самым мы, конечно, вступаем в противоречие с так называемым

"дуализмом волн и частиц". Однако, раз можно описать движение атомных частиц с помощью ν -уравнения и увязать частицу, как таковую, с ближней зоной эфира (с эфирным "пузырем"), благодаря чему частица и обнаруживает волновые свойства, *т. е. словесный дуализм, служащий только для того, чтобы откrestиться от необходимости более глубокого изучения взаимоотношений волн и частиц, можно расшифровать физически*, то можно фотон трактовать как самостоятельный пузырь", оторвавшийся от "пузыря", нагруженного частицей. Когда эфирный "пузырь" связан с частицей, то его размеры определяются по порядку длиной волны де Бройля $\lambda = h/mv$ для этой частицы, этой же величиной задается порядок амплитуды автоколебаний самой частицы. Когда от этого "пузыря" отрывается фотон, то его размеры будут определяться только массой самого фотона $\lambda = h/mc$, здесь m - масса фотона, связанная с его энергией соотношением $E=h\nu=mc^2$. Поэтому его размеры много больше размеров атомной системы, его породившей.

И частота ν и длина волны λ будут здесь являться не характеристиками расплывающейся в пространстве волны, а характеристиками колебательного процесса внутри эфирного "пузыря" - фотона.

В любой среде могут существовать процессы двух видов - волны и вихри. Это относится и к той среде, в которой распространяются электромагнитные волны. Излучения радиостанций представляют собой волны и никакими квантовыми, частичными свойствами они не обладают. То обстоятельство, что мы можем написать $E=h\nu$, подставив вместо ν частоту радиоволны, ничего не доказывает. Так же, как нелепо писать выражение длины волны де Бройля для макроскопического тела (см. § 10, гл. V), также нелепо писать $E=h\nu$ для явно макроскопической, а не атомной системы. Фотон же явно представляет собой вихревое образование конечных пространственных размеров, он может лететь в течение миллионов лет и сохранять все свои свойства как частицы. Верно, обычные вихри в воздухе и воде недолговечны и в конце концов расплываются. Но и фотон не вечен - пролетая миллионы лет по просторам вселенной, он "стареет", размеры его увеличиваются, а это и означает его "покраснение". Поскольку в характеристики фотона входит постоянная Планка h , это означает, что фотон является продуктом таких систем, где существенным является взаимодействие частиц с окружающей средой, причем не спорадическое взаимодействие, а постоянное, которым нельзя пренебрегать, не рискуя полностью исказить все закономерности для этих частиц.

k	1	2	3	4
x_k	x	y	z	ict
Φ_k	A_x	A_y	A_z	$i\varphi$

Посмотрим теперь, как эти взгляды можно обосновать на основе наших общих положений. Для обычных электромагнитных полей можно составить

приведенную вверху таблицу. В первой строке даются слагающие 4-мерного вектора события, во второй строке - слагающие 4-мерного потенциала.

Если подобную таблицу написать для сопряженного мира, получим (см. первую и вторую главы):

Здесь скорость $v > C$.

k	1	2	3	4
x_k	x	y	z	ict
Φ_k	$A_0 \frac{v_x}{v}$	$A_0 \frac{v_y}{v}$	$A_0 \frac{v_z}{v}$	$i\varphi$

Переходя к обозначениям скоростей обычного мира, получим таблицу в таком виде:

k	1	2	3	4
x_k	x	y	z	ict
Φ_k	$A_0 \frac{u_x}{u}$	$A_0 \frac{u_y}{u}$	$A_0 \frac{u_z}{u}$	$i\varphi$

Если первая структура 4-мерного потенциала дает уравнения Максвелла, то вторая должна дать нечто другое, так как в последнем случае вектор-потенциал дает слагающие по координатам только через посредство слагающих скорости $u(u_x, u_y, u_z)^*$.

{*} Очевидно эти "потенциалы" не что иное, как слагающие ψ -функции v -уравнения (см. § 5, гл. II).

Еще раз эти соотношения можно представить следующей таблицей:

Таблица 6

	Частицы	Свет
Формализм обычного мира	ψ — функция u — уравнения	Уравнения Максвелла, четырехмерный потенциал, волны, действие на заряд
Формализм сопряженного мира	ψ — функция v — уравнения в форме четырехмерного потенциала, действие на массу	нелинейные уравнения Максвелла, четырехмерный потенциал, фотоны, действие на заряд

Если мы выберем оси координат так, что скорость системы, создающей потенциалы, будет направлена вдоль одной из осей, то вектор-потенциал будет иметь слагающую только вдоль этой оси.

$$A = A_0 \frac{u_x}{u} = A_x.$$

(476)

Для света $u \rightarrow c$. Таким образом, получается, что фотон не только будет иметь постоянную скорость c относительно любой системы отсчета, но в

нем будет какое-то направление (важное физически) совпадать с направлением его скорости.

Ввиду того, что при получении формул, связывающих энергию и импульс в сопряженном мире, происходит перестановка величин по сравнению с соответствующими преобразованиями для обычного мира, мы можем предположить, что происходит аналогичная перестановка между электрическим и магнитным полями по их связи с потенциалами, т. е. мы полагаем

$$\begin{aligned} E &= \text{rot } A \\ H &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \quad (477)$$

Ввиду характера вектор-потенциала для данного случая следует ожидать более узкой специальной формы решений для векторов E и H в противоположность обычным уравнениям Максвелла, описывающим электромагнитные волны. Поскольку мы хотим проверить нашу гипотезу о том, что фотон представляет собой вихрь, положим, что вектор $H(H_r, H_z)$ образует структуру, подобную сферическому вихрю Хилла [31], но в виде эллипса (см рис. 58).

Для эллипсоидного вихря функция потока имеет форму

$$V_M = \frac{1}{2} B(t) \cdot r^2 (a^2 - \frac{a^2}{b^2} z^2 - r^2). \quad (478)$$

Отсюда слагающие магнитного поля

$$H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial V_M}{\partial z} = -B(t) \delta^2 \cdot zr,$$

$$H_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_M}{\partial r} = -B(t)(a^2 - \delta^2 z^2 - 2r^2), \quad \delta = \frac{a}{b}.$$

Определим из уравнений (479) вид потенциалов φ и A , помня, что вектор A имеет только одну составляющую вдоль оси z :

$$H_r = -B(t) \cdot \delta^2 \cdot zr - \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (480)$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{1}{2} B(t) \cdot \delta^2 \cdot zr^2. \quad (481)$$

Далее

$$\begin{aligned} H_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = B(t) \cdot \frac{\delta^2 r}{2} - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = \\ &= -B(t)(a^2 - \delta^2 z^2 - 2r^2). \end{aligned} \quad (482)$$

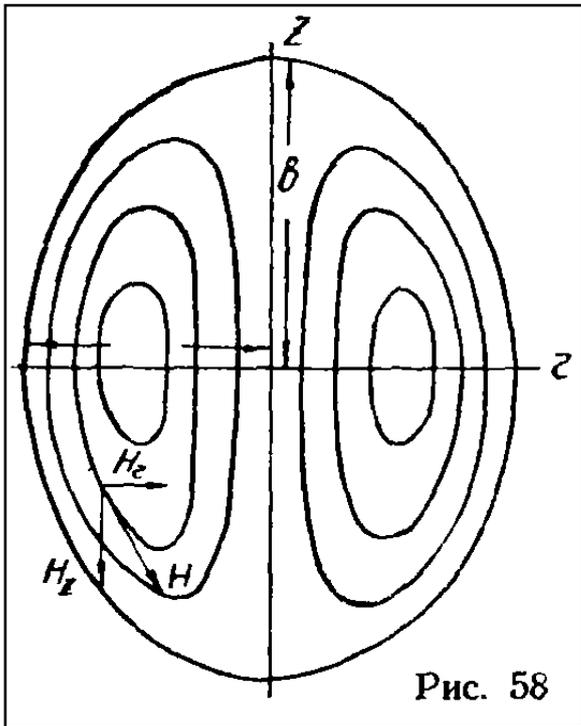


Рис. 58

Отсюда, если $B(t) = B_0 \sin \omega t$,

$$A = -\frac{B_0 c}{\omega} \cos \omega t [a^2 - \delta^2 z^2 - \gamma r^2], \quad \gamma = 2 + \frac{\delta^2}{2}. \quad (483)$$

Единственная слагающая напряженности электрического поля

$$E_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{B_0 c}{\omega} \cos \omega t \cdot 2\gamma r = -\frac{B_0 \lambda_k}{2\pi} \cos \omega t \cdot 2\gamma r. \quad (484)$$

Здесь $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_k}$ вводится пока чисто формально. О смысле этих величин речь будет позже.

Зная выражения для составляющих электрического и магнитного полей, мы можем попытаться найти уравнения, которым они удовлетворяют. Можно убедиться, что этими уравнениями будут:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -\frac{2}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 H^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial H^2}{\partial r} &= \frac{8r^2}{(4 + \delta^2)^2} (\Delta H)^2. \end{aligned} \quad (485)$$

Получаются уравнения, отличные от уравнений Максвелла. Будут ли это действительно уравнения полей внутри фотонов, сказать трудно, так как прямых экспериментальных данных для этого нет. Нужно посмотреть, какие следствия вытекают из этих уравнений и не будут ли они хотя бы косвенно подтверждать их справедливость.

Из выражений для слагающих магнитного и электрического полей видно, что существуют моменты, когда все поле фотона является чисто электрическим или чисто магнитным. Поскольку потерь энергии нет, то это обстоятельство и поможет нам уточнить форму фотона. Мы можем вычислить энергию фотона, когда его поле является чисто электрическим. Считаем, что для плотности энергии поля справедливы обычные соотношения, тогда

$$\begin{aligned} E_{\max}(E) &= \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{B_0^2 \lambda_k^2 (4 + \delta^2)^2}{32\pi^3} \int_0^a \int_0^b \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} 2\pi r^3 dr dz = \\ &= \frac{B_0^2 \lambda_k^2 b}{4\pi^2 a} \cdot \frac{a^3 (4 + \delta^2)^2}{15}. \end{aligned} \quad (486)$$

Аналогично для случая чисто магнитного поля

$$E_{\max}(H) = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{B_0^2}{8\pi} \int_0^a \int_0^b \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}^{126} [(\delta^4 + 4\delta^2) z^2 r^2 + a^4 + \delta^4 z^4 + 4r^4 - \\
&\quad - 2\delta^2 a^2 z^2 - 4a^2 r^2] 2\pi r dr dz = \\
&= \frac{B_0^2}{4} a^7 \left[-\delta^3 0,171 + \delta 0,152 + \frac{0,210}{\delta} \right]. \quad (487)
\end{aligned}$$

Длина волны λ есть характеристика волны. Фотон должен иметь другие характеристики. Такой характеристикой может быть время существования электрического поля или магнитного поля T_k и расстояние, на которое продвинется фотон за время существования электрического поля фотона, т. е. за то время, за которое фотон при столкновении совершит максимальную работу и передаст свой момент количества движения. Этим расстоянием можем считать половину продольной длины фотона, b . Таким образом,

$$\lambda_k = b = cT_k. \quad (488)$$

Из требования равенства $E_{\max}(E) = E_{\max}(H)$, получим, что

$$\frac{a}{\lambda_k} = 0,77. \quad (489)$$

Вычисленная нами энергия фотона должна равняться той энергии, которую мы фиксируем на опыте

$$E_{\max} = B_0^2 \cdot \lambda_k^7 \cdot 0,0126 = h \frac{c}{2\lambda_k}. \quad (490)$$

Мы положили, что $\lambda = 2\lambda_k$, т. е. фотон, разбиваясь в волну (а λ определяется по диффракционным опытам с волнами света), уменьшает свою внутреннюю частоту, аналогичную тому, как при образовании пар, энергия каждой частицы оказывается равной энергии фотона с вдвое меньшей частотой, чем у исходного фотона.

Вычислим теперь момент количества движения фотона. Как мы видели в предыдущем параграфе, момент количества движения, потерянный электроном, должен быть передан фотону. В согласии с нашей общей концепцией мы можем считать, что наш фотон в виде эллипсоида вращается вокруг своей продольной оси. Момент количества движения некоторого элемента фотона можно записать как

$$\Delta p = mr \cdot \frac{c}{a} r = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{r^2 \Delta V}{0,77\lambda_k}. \quad (491)$$

Интегрируя по всему объему, получим

$$p = \frac{1}{c} \frac{B_0 \lambda_k}{8\pi^2} \frac{(4 + \delta^2)^2}{0,77^2} \int_0^a 2r^3 \sqrt{a^2 - r^2} dr = h \cdot 0,166. \quad (492)$$

Здесь использовано полученное выше значение V_0^2 и сделано предположение, что скорость v_ϕ каждого элемента объема фотона пропорциональна его удалению от оси и равна c на экваторе эллипсоида. Момент получился почти в точности равный $h/2\pi$

В пользу такой структуры фотона может говорить один факт, относящийся, правда, к шаровой молнии, т. е. образованию явно не атомному. Однако нам кажется, что структура поля шаровой молнии должна быть подобна структуре фотона. То, что шаровая молния движется не со скоростью света, объясняется тем, что она "нагружена" плазмой. Молнии, не нагруженные плазмой, которые могли бы двигаться со скоростью света, мы просто не видим. На снимке шаровой молнии, помещенной в журнале "Наука и жизнь" № 11 за 1975 год, ясно видны темные перехваты. Этот факт можно хорошо связать с картиной электромагнитного эллипсоида-фотона. Когда в таком макрэфотоне вся энергия - чисто магнитная, - ионизация отсутствует, и свечение ослабляется до минимума. Максимум его будет в момент, когда вся энергия поля молнии - чисто электрическая.

§ 5. Волны и кванты света.

Согласно изложенным выше взглядам, свет может существовать в двух "ипостасях": или в виде волн, или в виде частиц-квантов (но не "и" ... "и"!). Например, свет от ондулятора Мотца [32] представляет собой чисто волновое явление, подобное излучению радиостанции. Это можно проверять на опыте: нужно довести интенсивность излучения до такой величины, чтобы напряженность поля E волны (если считать излучение волновым) была недостаточной для совершения работы выхода электрона из какого-либо металла. Тогда даже при наличии нужной частоты (выше красной границы фотоэффекта для данного металла) фотоэффект наблюдаться не будет. Предельную напряженность поля можно вычислить, исходя из следующих соображений. Объем кванта имеет порядок $(\lambda/2)^3$. Энергия кванта $\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$. С другой стороны, эта энергия может быть выражена через среднюю амплитудную напряженность электрического поля кванта.

$$\frac{E_{\text{ср}}^2}{8\pi} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^3 = \frac{hc}{\lambda}. \quad (493)$$

Отсюда

$$E_{\text{ср}} = \frac{8 \sqrt{\pi hc}}{\lambda^2}.$$

Например, для пороговой длины волны $\lambda = 5 \cdot 10^3 \text{ \AA}$ эта напряженность будет иметь порядок 10 кв/см . Напряженность поля чистой волны должна быть меньше этой величины, чтобы фотоэффект не наблюдался. Если же излучение квантовое, то фотоэффект будет наблюдаться при любых интенсивностях излучения, лишь бы частота света превышала частоту красной границы фотоэффекта.

Вообще, если встать на точку зрения существования и волн, и частиц света - фотонов, открывается широкий простор для экспериментального исследования природы света, взаимоотношений волн и квантов, т. е. тех проблем, которые словечком "даулизм" вообще были зачислены в разряд несуществующих.

§ 6. Формула Планка.

Стоячие световые волны, возникающие в замкнутых полостях, по своим характеристикам стоят ближе всего к квантам, как они понимаются нами. В то время как у бегущих плоских электромагнитных волн вектора E и H идут всегда в фазе (т. е. одновременно проходят через нулевые значения и через максимумы), у стоячих электромагнитных волн (например волн в резонаторах СВЧ) вектора E и H сдвинуты во времени на $\pi/2$ (т. е. в момент, когда $E = E_{max}$, $H = 0$ и наоборот. Таким же свойством, как мы видели, обладают векторы E и H в квантах (см. выше, § 4 этой главы)).

В замкнутой полости с равновесным излучением в виде системы пространственных стоячих волн (подобную картину таких волн в прямоугольном резонаторе СВЧ) превращение квантов, излучаемых стенками, в стоячие волны и обратно, происходит наиболее простым образом в противоположность превращению квантов в бегущие волны и обратно.

Пространственные стоячие волны образуют ячейки с фазовым объемом

$$\left(p \frac{\lambda}{2}\right)^3 = \left(\frac{h}{2}\right)^3, \quad (494).$$

так как $p\lambda = h$. Пространственный объем одной кубической ячейки $(\lambda/2)^3$. Если V - объем всей полости, занятой стоячими волнами, то

$$p^3 V = \left(\frac{h}{2}\right)^3 N, \quad (495).$$

где N - число ячеек в области. Поскольку нас интересует абсолютное значение импульса p (структура стоячих волн определяется не направлениями распространения бегущих волн, а формой полости) мы можем выразить импульсный объем в сферической системе координат. Тогда

$$\frac{4}{3} \pi p^3 = \frac{h^3 N}{8 V}. \quad (496)$$

В данном объеме V - число структурных ячеек определяется таким образом величиной импульса P (собственно говоря, раз мы употребляем понятие импульса, мы тем самым ставим в соответствие структурный элемент области определенному кванту). Другому импульсу будет соответствовать и другое число элементов N . Если λ_2 мало отличается от λ_1 , то изменение числа структурных ячеек, приходящееся на единичный интервал длин волн в

промежутке $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, будет

$$\frac{4\pi}{h^3} p^2 V \Delta p = \Delta \left(\frac{N}{8} \right). \quad (497)$$

Поскольку $p = \frac{h\nu}{c}$ и $dp = \frac{h}{c} d\nu$, то формулу (497) можно переписать в виде

$$\frac{4\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \cdot V = dz_p \quad (498)$$

или, учитывая два направления поляризации:

$$\frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} V = dz_p. \quad (499)$$

Это есть число структурных элементов ячеек в фазовом пространстве, соответствующих интервалу частот от ν до $\nu + d\nu$ и в объеме V (напомним, что в фазовом пространстве объем ячеек один и тот же для любых λ). Чтобы получить полную энергию излучения в единице объема V , связанную с этим

интервалом частот, нужно число элементов в единице объема, т. е. $\frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$ умножить на энергию соответствующего структурного элемента стоячих волн, которая равна энергии кванта этой же частоты $\varepsilon = h\nu$, и на вероятность осуществления такой структуры, т. е.

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \varepsilon W(\varepsilon) d\nu. \quad (500)$$

Вероятность появления квантов с энергией $\varepsilon = h\nu$ (а значит и вероятность появления соответствующей системы стоячих волн) не зависит от конкретной структуры излучателей, из которых состоит стенка полости. То, что Планку удалось подсчитать произведение $\varepsilon W(\varepsilon)$ как среднюю энергию гармонического осциллятора, энергия которого выражается формулой $\varepsilon = n h\nu$, есть счастливая случайность, так как излучателями являются не гармонические осцилляторы, а более сложные структуры — атомы и молекулы. Это особенно подчеркивается тем, что если вместо выражения энергии $\varepsilon = n h\nu$ взять его выражение по обычной квантовой механике $\varepsilon = (n + 1/2) h\nu$, то интегральное излучение полости оказывается бесконечным. Поэтому далее нужно проводить все рассуждения, которые обычно проводят с помощью коэффициентов Эйнштейна. Отсюда получают

$$u_\nu = u_{mn} = \frac{A_m^n / B_m^n}{e^{\frac{h\nu_{mn}}{kT}} - 1}. \quad (501)$$

При выводе этой формулы конкретная форма излучателя не рассматривается, важно только то, что при переходе из состояния с энергией E_m в состояние с энергией E_n излучается квант с энергией $h\nu_{mn} = E_m - E_n$. С

другой стороны, исходя из статистики Бозе-Эйнштейна для фотонного газа (здесь опять используется то обстоятельство, что фотоны, излучаемые стенками полости, независимо от направления их начальных скоростей, "укладываются" во вполне определенную систему стоячих волн), получаем для функции W формулу

$$W = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (502)$$

Сравнивая формулы (500), (501), можем написать

$$A_m^n / B_m^n = \frac{8\pi\nu^2 h\nu}{c^3}. \quad (503)$$

Отсюда известная формула Планка

$$u_\nu = u_{mn} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (504)$$

Из приведенных рассуждений видно, что то обстоятельство, что по автоколебательной квантовой механике для энергии гармонического

$$E = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

осциллятора получается вместо формулы

формула

$$E = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sqrt{n(n+1)}$$

, из теории излучения не сказывается, так как ее можно построить вообще без упоминания гармонического осциллятора.

§ 7. Прохождение частицей прямоугольного скачка потенциала.

Случай $E > V_0$.

Подобного рода задачи решаются в обычной квантовой механике, как задачи стационарные. В случае автоколебательной квантовой механики приходится с самого начала рассматривать задачу, как нестационарную.

Будем исходить из соотношений, которые мы имели для свободной частицы, так как по обе стороны от скачка потенциала частица движется равномерно (см. § 2, гл. V). Для обеих областей

$$\xi_1 = \frac{\lambda_1}{8\pi} \sin(4\omega_1 t + \alpha_1); \quad \xi_2 = \frac{\lambda_2}{8\pi} \sin(4\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\dot{\xi}_1 = v_1 \cos(4\omega_1 t + \alpha_1); \quad \dot{\xi}_2 = v_2 \cos(4\omega_2 t + \alpha_2). \quad (505)$$

В месте скачка потенциала испытывает скачок классическая скорость частицы. Что же будет с квантовыми величинами ξ_1 , ξ_2 , ξ'_1 , ξ'_2 ? Можно предположить, что энергия частицы (включая и кинетическую энергию квантового движения) должна в момент скачка оставаться постоянной

$$E = \frac{mv_1^2}{2} \pm \frac{m\dot{\xi}_1^2}{2} + V_1 = \frac{mv_2^2}{2} \pm \frac{m\dot{\xi}_2^2}{2} + V_2. \quad (506)$$

Поскольку для классической энергии имеет место закон сохранения, то в точке скачка должно быть

$$\pm \frac{m\dot{\xi}_1^2}{2} = \pm \frac{m\dot{\xi}_2^2}{2}. \quad (507)$$

Это вытекает из тех физических соображений, что за бесконечно малое время, в течение которого меняется управляющий параметр v , управляемая величина ξ не успевает измениться на конечную величину.

Из последнего соотношения получаем

$$\pm \dot{\xi}_1 = \pm \dot{\xi}_2 \quad (508)$$

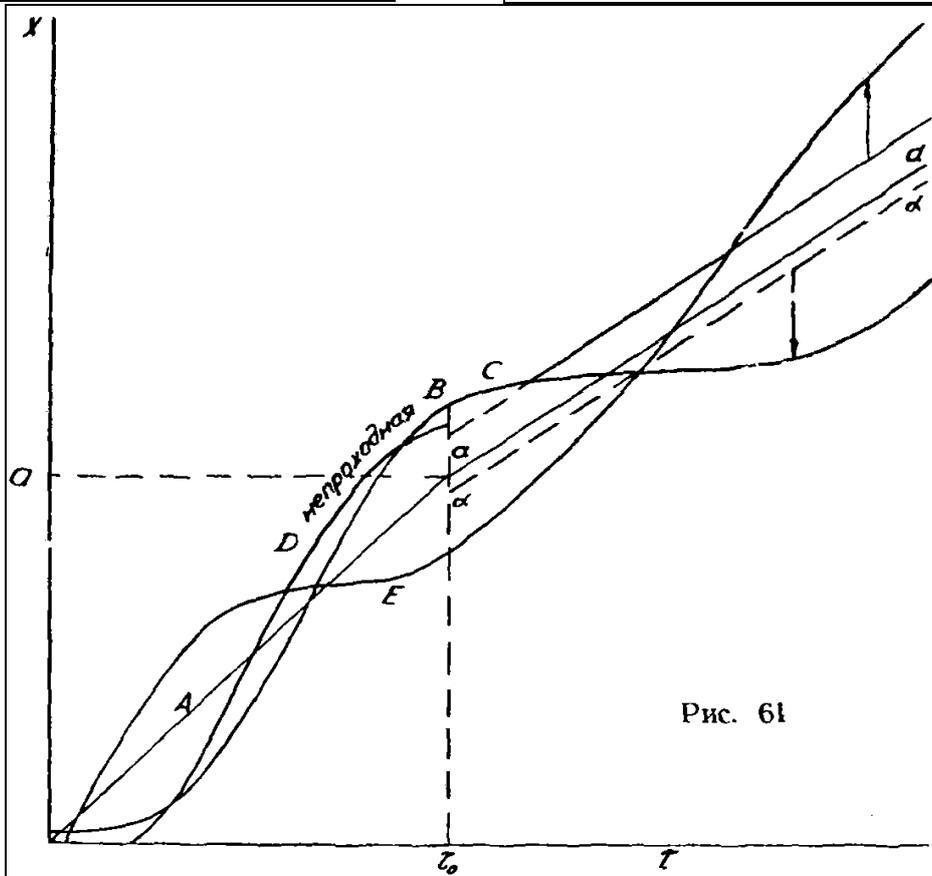
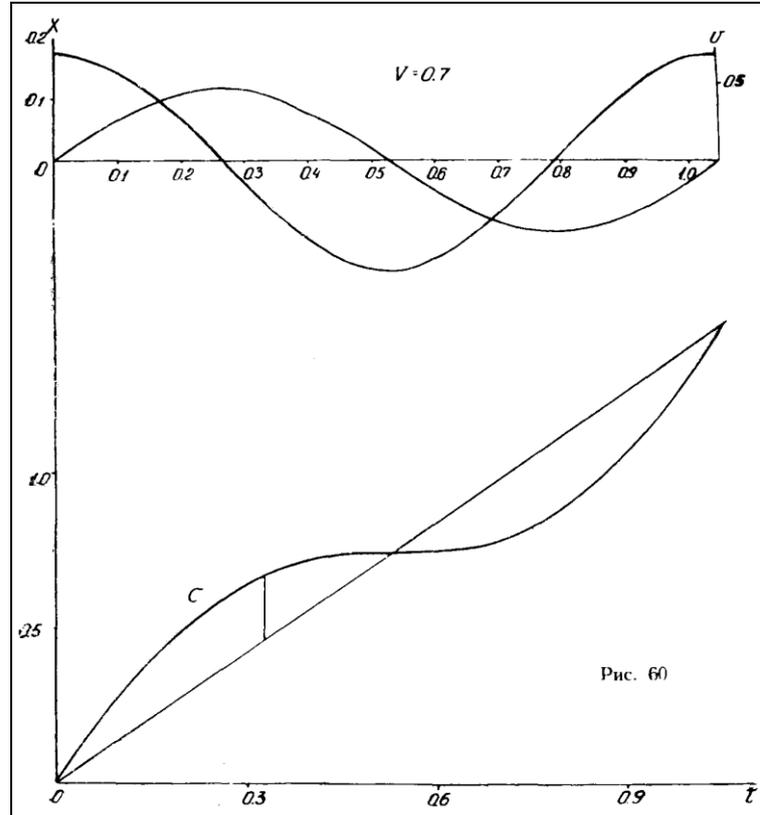
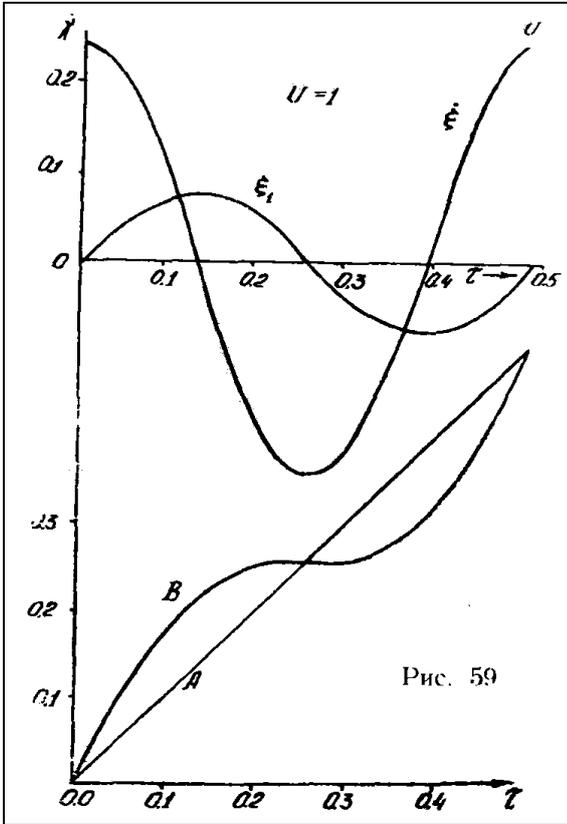
или

$$\dot{\xi}_1 = v_1 \cos(4\omega_1 t + \alpha_1) = \dot{\xi}_2 = v_2 \cos(4\omega_2 t + \alpha_2). \quad (509)$$

Для сдвигов ξ получается скачок

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\sin 2(4\omega_1 t + \alpha_1)}{\sin 2(4\omega_2 t + \alpha_2)}. \quad (510)$$

Дальнейшие рассуждения лучше всего провести на конкретном примере. На рис. 59 даны диаграммы для равномерно движущейся частицы со скоростью $v=1$. На рис. 60 такие же диаграммы для частицы со скоростью $v=0,7$. Графики результирующего движения переносятся на кальку, после чего можно строить графики перехода через скачок потенциала. На рис. 61 даны два примера такого перехода. Построение идет следующим образом. Чертим график классического движения с постоянной скоростью $v_1 = 1$ (прямая A на рис. 61). На эту прямую перекальваем с кальки кривую B , так, чтобы она оказалась в момент τ_0 с некоторой фазой φ_0 . По этой фазе с помощью рис. 59 определяем соответствующую скорость ξ'_1 . На рис. 60 находим соответствующую равную ей по величине и по знаку скорость ξ'_2 . По этой скорости определяем соответствующую фазу на кривой C (рис. 60) и с помощью кальки переносим эту кривую, начиная с данной фазы на кривую C рис. 61. Поскольку в месте скачка $\xi_1 \neq \xi_2$, а частица не может находиться одновременно в разных местах, то совмещаем внешние концы сдвигов ξ_1 и ξ_2 . Тем самым прямая классического движения aa' смещается до прямой $\alpha\alpha'$.



Также можно построить кривые для других фаз входа. Некоторые фазы оказываются "непроходными" и частица должна в этом случае отразиться. Такой кривой оказывается кривая D (рис.61). Можно таким путем найти области непроходных фаз и вычислить коэффициент отражения. Очевидно, этот коэффициент будет тем больше, чем больше скорость v_1 превышает скорость v_2 .

Из рис. 61 хорошо видно еще одно интересное обстоятельство. Квантовая координата ξ_1 кривой B в момент τ_0 оказывается уже в пределах зоны барьера, хотя управляющий параметр x_1 и v_1 находится еще в зоне до барьера. Только после момента τ_0 управляющими параметрами будут x_2 и v_2 . Для кривой E наоборот частица оказывается еще на подходе к барьеру (на расстоянии ξ_1), хотя классические параметры x_1 и v_1 достигли своих предельных значений.

Таким образом, частица будет еще продолжать двигаться в зоне до барьера, но управляться будет параметрами следующей зоны.

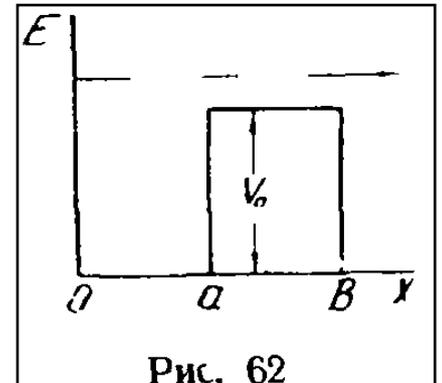
Случай $E = V_0$.

Для этого случая имеется только одна проходная фаза, когда $\xi'_1 = \xi'_2 = 0$, так как на поверхности барьера $v_2 = 0$. При всех остальных фазах происходит отражение частиц. Это отражение может происходить и в пределах второй зоны, но и (что очень любопытно) в пределах первой зоны.

§ 8. Прохождение частицы через прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины.

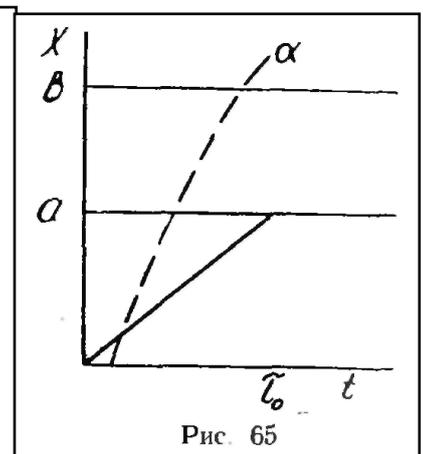
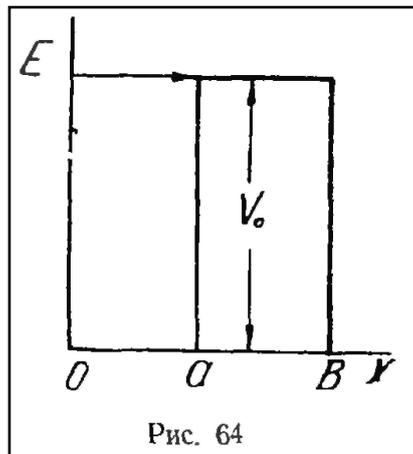
Случай $E > V_0$. (рис. 62).

Построение для этого случая ничего особенного не представляет. Как и раньше на выходе из зоны барьера ($x = b$, рис 63) находим соответствующую конечной фазе падающей волны скорость ξ'_2 и по равной ей начальной скорости ξ'_3 для прошедшей волны строим ее начальный сдвиг ξ_3 . Такое построение приведено на рис. 63.



Случай $E = V_0$. (рис. 64).

Здесь возможно прохождение частицы на другую сторону барьера за счет сдвига $\xi(\tau_0)$, когда $x^* > x_{\text{кл}}$ и если ширина барьера будет $\leq \xi(\tau_0)$. Когда материальная точка дойдет до



максимального сдвига и окажется по другую сторону $\xi(\tau_0)$ барьера, она попадает под управление скорости той же величины, что и до барьера, но начальное отклонение будет $\xi_2 = \alpha - b$ (рис. 65).

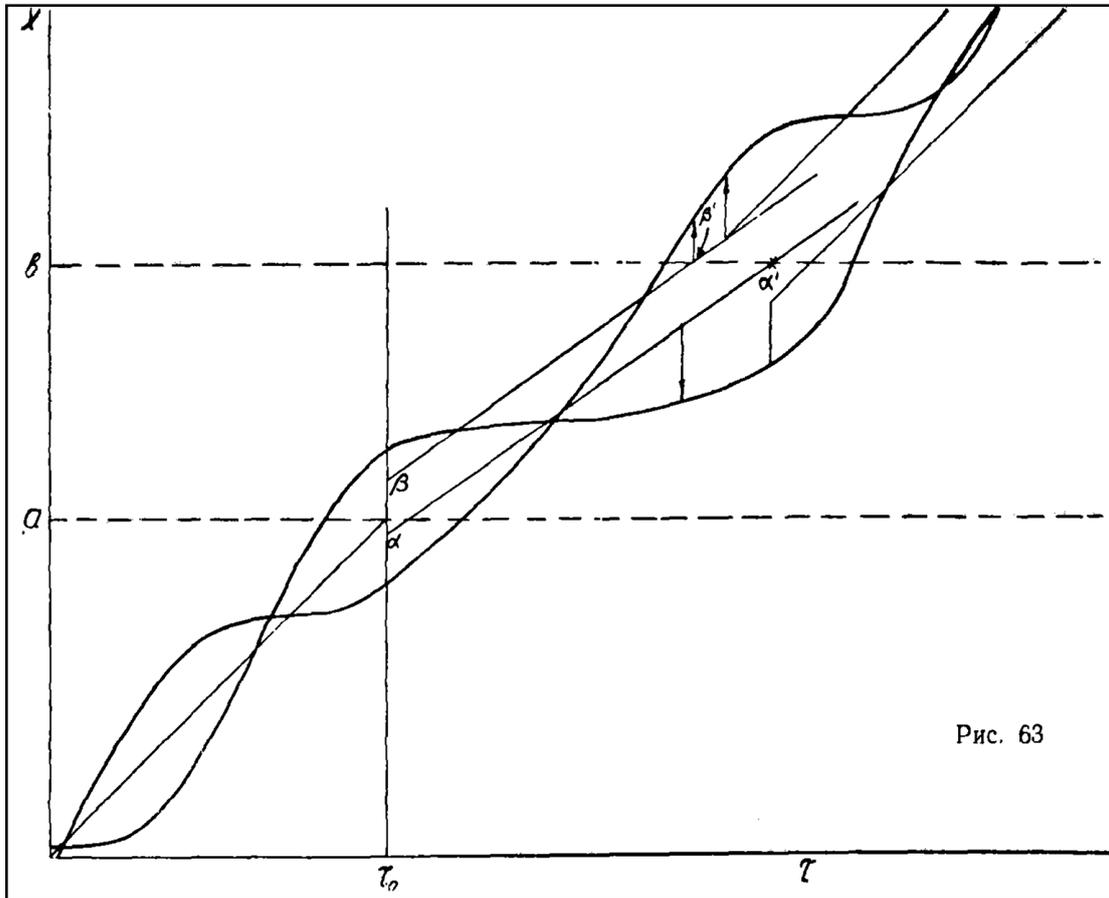


Рис. 63

§ 9. Прохождение частицы через прямоугольный потенциальный барьер при $E < V_0$. а-распад.

Этот случай требует особого рассмотрения, так как здесь в области барьера (рис. 66) выражение $v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_0)}$ оказывается мнимым $v = i|v|$. Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{im|v|}$, т. е. волнового процесса в этой зоне быть не должно. Формула для частоты $\nu = mv^2/h$ превращается в формулу $\nu = m|v|^2/h$, т. е. для частоты получается действительная величина. Соответственно сказанному волновое уравнение делается также "неволновым"

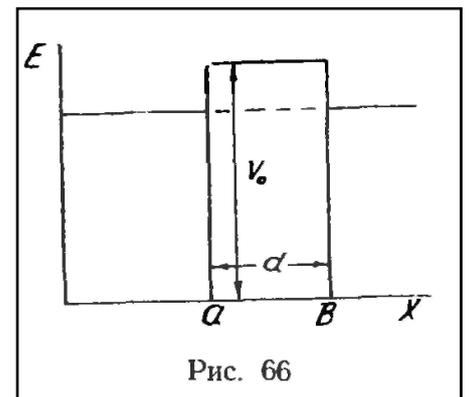


Рис. 66

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{|v|^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

(511)

Решаем его также методом разделения переменных

$$\frac{1}{\psi(x)} \cdot \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{|\psi(t)|} \cdot \frac{1}{\psi(t)} \cdot \frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{|v|^2}{\psi(x)} \cdot \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\psi(t)} \cdot \frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} = \omega^2.$$

Таким образом получаем уравнения

$$\frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} + \omega^2 \psi(t) = 0, \quad (512)$$

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - \frac{\omega^2}{|v|^2} \psi(x) = 0.$$

Вводя для краткости обозначение $\frac{\omega^2}{|v|^2} = \frac{4\pi^2 m^2 |v|^2}{h^2} = \alpha^2$, запишем

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - \alpha^2 \psi(x) = 0. \quad (513)$$

Решение его $\psi(x) = Ae^{-\alpha x}$. Для временной части ψ -функции получим $\psi(t) = \cos \omega t$. Полное решение

$$\psi(x, t) = Ae^{-\alpha x} \cdot \cos \omega t. \quad (514)$$

Наличие такой вполне реальной ψ -функции будет оказывать свое действие на частицу, если таковая окажется "внутри" барьера. Пока формально можем написать

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x^*} = \alpha Ae^{-\alpha x} \cdot \cos \omega t \Big|_{x^*} \quad (515)$$

В область барьера частица может попасть только за счет квантового движения, т. е. здесь может быть частица с координатой $x^* = \xi$ ($x_{\text{кл}}$ здесь отсутствует). Таким образом получается уравнение

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \alpha Ae^{-\alpha \xi} \cdot \cos \omega t. \quad (516)$$

Если брать значения входящих сюда параметров для α -частиц радиоактивных ядер, то можно в качестве первого приближения положить $e^{-\alpha t} \sim 1$ и $\cos \omega t \sim 1$. Тогда уравнение получится в простой форме

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{\alpha A}{m}. \quad (517)$$

Решение его

$$\xi = \frac{\alpha A}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (518)$$

Постоянные C_1 и C_2 непосредственно определяются по начальным (входным) значениям ξ_1 и ξ_2 . Амплитуду A можно определить, поскольку ψ -функция внутри барьера возбуждается за счет падающей волны, из входного значения второй производной от ξ по t :

$$\ddot{\xi}_1 = - \left(\frac{8\pi m v_1^2}{h} \right)^2 \cdot \xi_1 = \frac{\alpha A}{m}. \quad (519)$$

Знак амплитуды определяется знаком ξ_1 , т. е. будет отрицательным, так

как ξ_1 должно быть положительным (частица должна быть выброшена внутрь барьера). Управление на всем протяжении ξ_1 идет за счет скорости v_1 , которую частица имела до столкновения с барьером. Далее управление

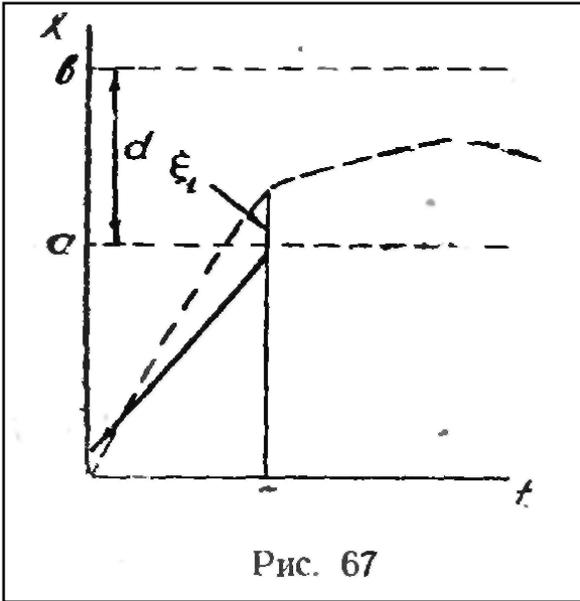


Рис. 67

должно идти за счет мнимой скорости. Из рис. 67 видно, что наиболее вероятно прохождение барьера, когда ширина барьера имеет порядок ξ_{\max} , т.е. когда частица попросту "переваливает" через барьер. С этой точки зрения делаются понятными некоторые особенности α -распада радиоактивных ядер.

Будем считать, что α -частица внутри ядра находится в прямоугольном ящике. Ее энергия определяется формулой

$$E - V_0 = \frac{n^2 h^2}{8mL} = \frac{mv^2}{2}. \quad (520)$$

Отсюда скорость частицы на n -ом уровне

$$v = \frac{n \cdot h}{2mL}. \quad (521)$$

Соответствующая длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{2L}{n}. \quad (522)$$

Приравнивая энергию E n -ого уровня кулоновской энергии α -частицы снаружи потенциального барьера (рис. 68)

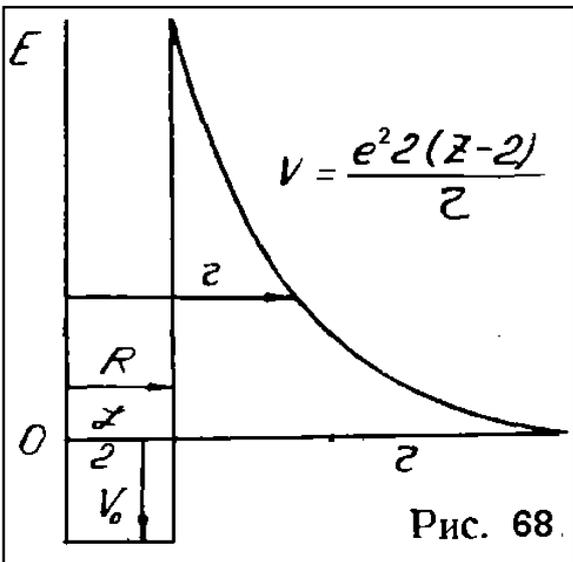


Рис. 68

$$E = \frac{n^2 h^2}{8mL} + V_0 = \frac{2e^2 (Z - 2)}{r} \quad (523)$$

получим

$$r = \frac{2e^2 (Z - 2)}{\frac{n^2 h^2}{8mL} + V_0} \quad (524)$$

При больших n

$$r \approx \frac{2e^2 (Z - 2) \cdot 4mL}{nh^2}. \quad (525)$$

Таким образом, ширина барьера на соответствующем уровне

$$r - \frac{L}{2} = \lambda \left(\frac{8e^2 (Z - 2) m}{nh^2} - \frac{n}{2} \right). \quad (526)$$

Отсюда можно сделать заключение, что наиболее благоприятные условия для α -распада ($\xi_{\max} \sim (r - L/2)$) будут только на самой вершине барьера, там, где кулоновская потенциальная кривая переходит в ядерную потенциальную

кривую. Опыт также говорит о том, что α -распад у всех радиоактивных ядер идет на нескольких самых верхних уровнях и резко на них обрывается (рис. 69).

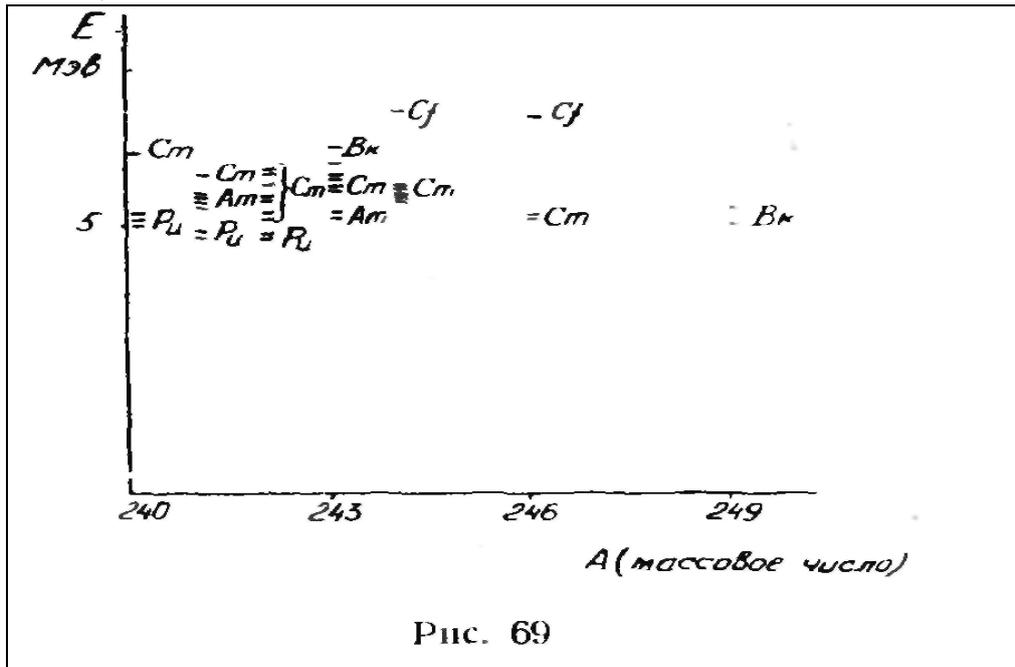


Рис. 69

§ 10. Движение частиц с непрерывно меняющейся скоростью.

До сих пор мы рассматривали случаи даже для переходных процессов, когда изменения скорости происходили мгновенно, скачком, а в остальные промежутки времени частица двигалась с постоянной скоростью.

Для реальных задач мы должны рассматривать нестационарный процесс с непрерывно меняющейся скоростью.

Для движения частицы в поле сил, изображаемом плавной потенциальной кривой, квантовая частота будет непрерывно меняться вместе с изменением скорости

$$\omega = \frac{2\pi m v^2}{h} \quad (527)$$

Волновое уравнение для такой частицы должно учитывать возможность непрерывного изменения амплитуды ψ -функции при переходе от точки к точке, поэтому возьмем его в достаточно общем виде:

$$\frac{1}{f^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(f^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\mu}{v^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (528)$$

Поскольку ψ -волна имеет физический смысл только в окрестности самой частицы (на расстояниях порядка длины волны де Бройля для частицы в данном месте), то не имеет смысла получать решение уравнения, справедливое для всей области значений x и t . Достаточно, чтобы оно имело смысл только на расстояниях $\sim \lambda = h/mv$.

В каждой точке кривой $x = F(t)$, изображающей классическую траекторию

частицы (мы рассматриваем одномерный случай), можно представить себе касательную прямую $x = v_0(t - t_0) + x_0$, вдоль которой для ψ -функции имело бы место выражение, полученное нами для частицы, движущейся с постоянной скоростью

$$\psi = A(v) \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right].$$

Классическая скорость v , фигурирующая в волновом уравнении, может быть выражена или как функция координаты x , или как функция времени t , поэтому решение может быть найдено методом разделения переменных. Для этого умножаем обе части уравнения на v^2 , рассматривая скорость v как функцию координаты x

$$\frac{v^2}{f^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(f^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (529)$$

Полагаем $\psi = \psi(x) \cdot \psi(t)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi(x)} \frac{v^2}{f^2} \frac{d}{dx} \left(f^2 \frac{d\psi(x)}{dx} \right) &= \frac{1}{\psi(t)} \cdot \frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} + \frac{\mu}{\psi(t)} \frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= -\omega^2(t) = -\omega^2(x). \end{aligned} \quad (530)$$

Отсюда уравнение для временной части функции ψ

$$\frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} + \mu \frac{d\psi(t)}{dt} + \omega^2(t) \psi(t) = 0; \quad \omega = \frac{2\pi m v^2}{h}. \quad (531)$$

Для конкретности возьмем движение в постоянном электрическом поле,

для которого $v = at = \frac{eE}{m} t$. Тогда

$$\omega = \frac{2\pi m}{h} \left(\frac{eE}{m} \right)^2 t^2. \quad (532)$$

Коэффициент μ , характеризующий изменение амплитуды ψ функции, должен быть функцией от v (другими словами и от t). Положим $\mu = c/v$. μ имеет размерность, обратную времени, поэтому в нашем случае $\mu = \gamma/t$, γ - безразмерная постоянная. Так получается уравнение

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{d\psi}{dt} + A^2 t^4 \psi = 0 \quad (533)$$

здесь $A = \frac{2\pi m}{h} \left(\frac{eE}{m} \right)^2$. Это уравнение известного типа

$$x^2 y'' + a x y' + (b x^m + c) y = 0 \quad (534)$$

Решение его имеет вид

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_\nu \left(\frac{2}{m} \sqrt{b} \cdot x^{\frac{m}{2}} \right) \text{ при } \nu = \frac{1}{m} \sqrt{(1-a)^2 - 4c}. \quad (535)$$

Обратимся теперь к уравнению для пространственной части ψ -функции.

Имеем

$$\frac{v^2}{f^2} \frac{d}{dx} \left(f^2 \frac{d\psi}{dx} \right) + \omega^2 \psi = 0 \quad (536)$$

или

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2}{f} \frac{df}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dx} + \left(\frac{2\pi m v}{h} \right)^2 \psi = 0. \quad (537)$$

В случае движения с постоянной скоростью решения для уравнения (153)

пространственной части ψ -функции $\psi(x) = \frac{\cos \omega \frac{x}{v}}{\sin \frac{\omega x}{v}}$ и решения уравнения

для временной части ψ -функции $\psi(t) = \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t}$ переходили друг в друга,

если мы, например, заменяли x через $x=vt$. Поскольку решение нашего волнового уравнения должно совпадать с решением "соприкасающегося" волнового уравнения с постоянной скоростью, попробуем добиться совпадения решений для $\psi(x)$ и $\psi(t)$. Заменим в уравнении для $\psi(t)$ переменную t выражением $x=at^2/2$. Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{1+\gamma}{2x} + \left(\frac{2\pi m}{n} \right)^2 \cdot 2ax \psi = 0, \quad v^2 = 2ax. \quad (538)$$

Сравнивая его с уравнением (537), видим, что должно быть

$$\frac{2}{f} \frac{df}{dx} = \frac{1+\gamma}{2x}. \quad (539)$$

Можно убедиться, что подходящим значением будет $\gamma = -4$. Тогда для функции f получается уравнение

$$\frac{2}{f} \frac{df}{dx} = -\frac{3}{2x}. \quad (540)$$

Отсюда $f = 1/x^{3/4}$. Таким образом, можно написать частные решения (см. (535)).

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left[\frac{2x}{a} \right]^5 \cdot Z_{-\frac{5}{6}} \left[\frac{a}{3} \sqrt{\frac{2\pi m}{h}} \left[\frac{2x}{a} \right]^{3/2} \right], \\ \psi(t) &= t^5 \cdot Z_{-\frac{5}{6}} \left(\frac{a}{3} \sqrt{\frac{2\pi m}{h}} \cdot t^3 \right). \end{aligned} \quad (541)$$

Полное решение конструируется подобно тому, как из

$$\sin \omega t, \cos \omega t, \sin \frac{\omega x}{v}, \cos \frac{\omega x}{v}$$

получается выражение

$$\psi = A \cos \omega \left[t - \frac{x}{v} \right].$$

К сожалению здесь такой простоты не будет. Подобным же образом

решаются задачи для других законов сил. Зная выражения для ψ -функций, можно найти квантовое движение частицы в любой момент времени. Трудности здесь только вычислительные.

... "Ты веришь в играющего в кости бога, я - в полную закономерность в мире объективно сущего,.. Я надеюсь, что кто-нибудь найдет более реалистический путь и соответственно более осязаемый фундамент для подобного воззрения... Большие первоначальные успехи теории квантов не могли меня заставить поверить в лежащую в основе игру в кости".

А. Эйнштейн. Письмо М. Борну
УФН, 1956. 59, в. I.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На довольно большом материале, изложенном выше, достаточно убедительно, как нам кажется, показано, что кроме и наряду с обычной квантовой должна существовать детерминистическая квантовая механика. Эта новая автоколебательная квантовая механика может в принципе решать любую задачу микромира, хотя в силу своей специфичности ей более по плечу задачи «квазиклассического» типа, в задачах же, по существу статистических, преимущество, несомненно, на стороне обычной квантовой механики. Общими задачами являются только задачи на собственные значения. Таким образом, автоколебательная квантовая механика не «отрицает» обычную квантовую механику, поскольку они обе вытекают из одного источника — специальной теории относительности.

Автоколебательная квантовая механика не является и «ревизионистской» теорией, ибо она не вмешивается во «внутренние» дела обычной квантовой механики. Хотя, конечно, некоторые положения, связанные с обычной квантовой механикой, придется пересмотреть. По всей видимости, статистическая причинность, которая в квантовой механике окружена особым ореолом, спустится до самой обычной статистической причинности, с которой мы встречаемся на каждом шагу в жизни. Ведь никто же не объявляет, что данный гражданин умер в силу статистической причины, хотя его смерть и не будет противоречить статистическим закономерностям. Поэтому мы целиком на стороне Эйнштейна. По нашему мнению, в микромире существует самая настоящая железная причинность, этой железной причинности и обязан своим существованием окружающий нас мир. И эту причинность позволяет исследовать автоколебательная квантовая механика. «Неизбежность странного мира» оказывается, пожалуй, не такой уж неизбежной.

Автоколебательная квантовая механика может иметь большое чисто методическое значение. Обычный прямой переход от классической физики к квантовой механике, которая и механикой-то называется неизвестно почему,

настолько насыщена она далекими от обычных представлений абстрактными и формальными понятиями и методами, воспринимается «широкими массами» физиков, а особенно работниками других областей науки, с очень большим трудом и, во всякое случае, у большинства из них не делается орудием познания. Автоколебательная механика дает возможность получить промежуточную ступень, обладающую многими достоинствами классической физики, но вводящую в специфику квантовых явлений. После проработки автоколебательной квантовой механики достоинства (конечно, и недостатки) обычной квантовой механики вырисовываются особенно выпукло.

То, что мы изложили в данной книжке, это только часть проблем, которые может решить автоколебательная квантовая механика. Мы не затронули более сложные задачи, такие как учет спина, проблема многих частиц и т. д. отчасти просто потому, что автор не успел их рассмотреть, отчасти, чтобы не увеличивать объем книги. Поэтому может сложиться впечатление о некоторой примитивности теории, о «механицизме» и т. д. Но это просто потому что мы рассматривали самые простые случаи, в дальнейшем теория несомненно усложнится и в физическом и в математическом аспектах. Наглядность же, присущая автоколебательной квантовой механике, особенно должна импонировать физику-экспериментатору, поскольку она дает чрезвычайно широкий простор для фантазии (в положительном смысле этого слова!). Достаточно напомнить задачи, которые были рассмотрены в тексте (гл. V).

Из особенно интересных задач, которые в настоящее время рассматриваются автором, нужно отметить задачу о неэлектромагнитном излучении, связанном с волной де Бройля и которое можно назвать дебройлевским. Это излучение описывается 4-мерной ψ -функцией ν -уравнения (гл. II). По всей вероятности это есть то самое излучение, которое давно требуют от физиков биологи. Это то излучение, которое исходит от Солнца и предшествует появлению солнечных пятен и электромагнитного излучения, связанного с ними, и которое ощущается биологическими объектами. Возможно, что и в основе телепатических явлений лежит то же излучение.

Имеется еще много других проблем, которые вытекают из автоколебательной квантовой механики. Часть этих проблем решается автором и очень небольшим кругом лиц, поддерживающих его. Хотелось бы надеяться, что с появлением этой книжки этот круг расширится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Родимов Б.Н. Атомы и молекулы как автоколебательные системы. Труды III межвузовской конференции по электронным ускорителям, Изд. ТГУ, Томск, 1961.
2. Родимов Б.Н. Новый вариант одной старой физической задачи. Изв. ТПИ, т. 122, Томск, 1962.
3. Родимов Б.Н. Сопряженная или автоколебательная квантовая механика и ее релятивистские основы. Изд. ТПИ, Томск, 1965.
4. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория поля. Физматгиз, М., 1960.
5. Паули В. Теория относительности. ОГИЗ. Гостехиздат, М., 1947.
6. Мак-Кониел Дж. Квантовая динамика частиц. ИЛ, М., 1962.
7. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры, т. 2. Гос. изд. тех. теор. литературы, М., 1956.
8. Левич В.Г. Курс теоретической физики, т. 1. Физматгиз. М., 1962.
9. I. Andrade et Silva, F. Fer, P. Leruste et G. Lochak. Cahier de Physique, n° 129, 1961, 209—224.
10. Сегре Э. (ред). Экспериментальная ядерная физика. ИЛ, М., 1959.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИЛ, М., 1950.
12. Строение атомного ядра. ИЛ, М., 1959.
13. Кузнецов Д.С. Специальные функции. Высшая школа. М., 1962.
14. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1953.
15. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры, т. I. ГТТИ, М., 1956.
16. Харкевич А.А. Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике. ГТТИ, М., 1956.
17. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Физматгиз, М., 1959.
18. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1958.
19. Гейдон А. Энергии диссоциации и спектры двухатомных молекул. ИЛ, М., 1949.
20. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, М., 1961.
21. Комар А.П., Комар А.А. ЖТФ, 31, 231, 1961.
22. Комар А.П., Комар А.А. ЖТФ, 32, 867, 1962.
23. Хиппель А.Р. Диэлектрики и волны. ИЛ, М., 1962.
24. Сыркин Я.К., Дяткина М.Е. Химическая связь и строение молекул. Госхимиздат, М., 1946.
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Физматгиз. М., 1958.
26. Аксарьян Г. Индукционное самоускорение потока частиц. Атомная энергия, 6, 658. 1959.

27. Вилкинс М.Х.Ф. Биофизика, т. 8, 6, 641, 1963.
28. Аккерман Ю. Биофизика, МИР. М, 1964.
29. Родимов Б.Н. ЖТФ, 27, 1330, 1957.
30. Polonysky I., Donzon P., Sadron C. C. r. Acad. Sci, 1960. 250. N 20, 3414—3416.
31. Лэмб Г. Гидродинамика, Гостехиздат, М.. 1947.
32. Шерклифф У. Поляризованный свет. МИР, М., 1965.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СВОЙСТВ ОБЫЧНОГО И СОПРЯЖЕННОГО МИРОВ

§ 1. Две скорости материальных частиц	3
§ 2. Преобразования Лоренца	9
§ 3. Преобразование скоростей	13
§ 4. Замечания к закону сложения скоростей	16
§ 5. Четырехмерный вектор скорости	17
§ 6. Четырехмерный вектор количества движения	19
§ 7. Четырехмерный вектор силы и энергия	20
§ 8. Функция действия для сопряженного мира	24
§ 9. Связь соотношений неопределенности с релятивистскими соотношениями	26

Глава II. ОБОСНОВАНИЕ НЕОБХОДИМОСТИ ВТОРОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. О смысле второй (вариационной) скорости частиц	28
§ 2. О возможности второго волнового уравнения для частиц, .33	
§ 3. Вывод u -уравнения	36
§ 4. Вывод v -уравнения.....	37
§ 5. Релятивистская инвариантность v -уравнения	40
§ 6. u - и v -уравнения для связанных систем .	43

Глава III. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ БЕЗ ВРАЩЕНИЯ

§ 1. Свободная частица.....	48
§ 2. Частица в одномерной прямоугольной яме	49
§ 3. Частица в сферической яме без сил . .	50
§ 4. Угловая яма.....	51
§ 5. Гармонический осциллятор ...	53
§ 6. s -состояния атома водорода	57
§ 7. Интерпретация собственных функций v -уравнения .	60
§ 8. Проблема дейтерона.....	64

Глава IV. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ВРАЩЕНИЕМ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Задача о ротаторе. Векторные волновые функции	70
§ 2. Частица с вращением в прямоугольной потенциальной яме.....	72
§ 3. Задача об атоме водорода (1-состояния) . .	75
§ 4. Релятивистский вариант задачи об атоме водорода (s -состояния).....	83
§ 5. Релятивистский вариант задачи об атоме водорода (1-состояния) ...	86

Глава V. КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ КАК АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

- § 1. Свойства автоколебательных систем . 90
- § 2. Автоколебания свободно движущейся частицы . 91
- § 3. Механическая модель квантового движения частицы 98
- § 4. Автоколебательное движение частицы в прямоугольном потенциальном ящике ... 100
- § 5. Автоколебания в s-состояниях атома водорода 101
- § 6. Автоколебания в дейтероне 105
- § 7. О системах, для которых не выполняется условие кратности классической и квантовой частот . 108
- § 8. Управление в атомных системах . . 109
- § 9. Волна де Бройля для макрообъектов . . .113
- § 10. Можно ли ψ -функцию и-уравнения истолковать механически? 113;

Глава VI. НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ СЛЕДСТВИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

- § 1. Молекулы и комплексы молекул и атомов как резонаторы для квантовых волн115
- § 2. Сдвиг частоты ЯМР для протона водорода в электрическом поле.....118
- § 3. Об одном механизме радиоизлучения Солнца, звезд и туманностей 121
- § 4. О некоторых физических свойствах ДНК 125

Глава VII. ИЗЛУЧЕНИЕ И ДРУГИЕ ПЕРЕХОДНЫЕ (НЕСТАЦИОНАРНЫЕ) ПРОЦЕССЫ

- § 1. О механизме излучения..... 133
 - § 2. Излучение гармонического осциллятора . . .135
 - § 3. Энергетические переходы в атоме водорода 136
 - § 4. Фотоны . 140
 - § 5. Волны и кванты света 147
 - § 6. Формула Планка..... 148
 - § 7. Прохождение частицей прямоугольного скачка потенциала 151
 - § 8. Прохождение частицы через прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины . . .155
 - § 9. Прохождение частицы через прямоугольный потенциальный барьер при $E < V_0$. α -распад 155
 - § 10. Движение частиц с непрерывно меняющейся скоростью 159
- Заключение 164
Литература 166

Отзывы на книгу *Издательство просит направлять*
по адресу:
г. Томск, пр. им. Ленина, 30,
Томский политехнический институт,
Научный отдел.

Дополнение к § 1 главы I

Более убедительными доказательствами существования релятивистского соотношения $\vec{v}\vec{u} = c^2$ могут быть следующие.

Варьированное прямолинейное движение частицы может рассматриваться как движение той же частицы относительно другой системы, движущейся относительно первой со скоростью V . Тогда вариаций

$$\delta x = x' - x = \frac{x - Vt - x \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\delta y = y' - y = 0;$$

$$\delta z = z' - z = 0;$$

$$\delta t = t' - t = \frac{t - \frac{V}{c^2}x - t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Беря отношение $\frac{\delta x}{\delta t}$ и переходя к пределу $V \rightarrow 0$, получим $\frac{x}{t} \cdot \frac{\delta x}{\delta t} = c^2$, где $\frac{x}{t} = v$ скорость частицы относительно неподвижной системы отсчета.

Если скорость частицы направлена не по оси x , а образует углы со всеми осями, то варьированная скорость \vec{V} будет направлена по направлению этой же скорости и будет образовывать те же углы с осями x, y, z . В этом случае вариации координат и времени будут:

$$\begin{aligned} \delta x = x' - x &= \frac{\varepsilon V_x}{V^2} \left[V_x x + V_y y + V_z z - \right. \\ &\quad \left. - c^2 t \left(1 + \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right) \right]; \\ \delta y = y' - y &= \frac{\varepsilon V_y}{V^2} \left[V_x x + V_y y + V_z z - \right. \\ &\quad \left. - c^2 t \left(1 + \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right) \right]; \\ \delta z = z' - z &= \frac{\varepsilon V_z}{V^2} \left[V_x x + V_y y + V_z z - \right. \\ &\quad \left. - c^2 t \left(1 + \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right) \right]; \\ \delta t = t' - t &= - \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left[V_x x + V_y y + \right. \\ &\quad \left. + V_z z - c^2 t \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1.$$

Беря отношения $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ и помня, что

$$V_x = |V|\alpha = \frac{|V|x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad V_y = |V|\beta, \quad V_z = |V|\gamma,$$

при переходе к пределу $V \rightarrow 0$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\alpha c^2 t}{x\alpha + y\beta + z\gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\beta c^2 t}{x\alpha + y\beta + z\gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\gamma c^2 t}{x\alpha + y\beta + z\gamma}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{x}{t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{y}{t} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{z}{t} \frac{\partial z}{\partial t} = c^2.$$

Очевидно также, что

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}} &= \alpha, \\ \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}} &= \beta, \\ \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}} &= \gamma. \end{aligned}$$

т. е. векторы \vec{v} и \vec{u} будут параллельны друг другу.

Дополнение к § 5 гл. III и к § 7 гл. IV

Если потребовать кратности квантовой и классической частот для гармонического осциллятора, то тогда $\alpha^2 \neq n(n+1)$ и решение не будет иметь форму полинома. В этом случае $\alpha^2 = n^2$ и $E = \frac{h}{2\lambda} \sqrt{\frac{\kappa}{m} \cdot n}$. Решение будет в виде

бесконечного ряда $U = (1 - \xi^2) \sum_i a_i \xi^i$.

Коэффициенты a_i будут определяться прежней рекуррентной формулой (198). Таким образом, в этом случае квантование энергии гармонического осциллятора по автоколебательной квантовой механике будет отличаться от квантования по обычной квантовой механике только отсутствием нулевой

энергии $E_0 = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot \frac{1}{2}$